

**Isotone Radonmaße
auf lokal kompakten geordneten Räumen**

von
Gerhard Hommel
aus
Erlangen

1973 # 293

Isotone Radonmaße auf lokal kompakten geordneten Räumen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt
von
Gerhard Hommel
aus
Erlangen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1973

Dekan: Professor Dr. W. Heumann

Erstberichterstatter: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter: Professor Dr. K. Jacobs

INHALT

Einleitung	1
§1 Vorbereitungen	4
1.1 Geordnete topologische Räume	4
1.2 Vollständig regulär geordnete Räume	6
1.3 Normal geordnete Räume	7
§2 Trennungssätze in geordneten topologischen Räumen	11
2.1 Definition der Trennungseigenschaften	11
2.2 Trennungseigenschaften lokal kompakter geordneter Räume	13
2.3 Zusammenfassung	15
§3 Einbettung von VRG-Räumen in kompakte geordnete Räume	16
3.1 Die Ordnungskompaktifizierung	16
3.2 Anwendungen der Ordnungskompaktifizierung	22
§4 Positive Radonmaße auf dem Graphen einer Ordnungs- relation	24
4.1 Beziehungen zwischen $\mathcal{M}^i(E)$ und $\mathcal{M}_b^+(G)$	25
4.2 Die Fortsetzungseigenschaft und der Hauptsatz	36
4.3 Eine Aussage über die Extrempunkte von C_μ	45
4.4 Schlußbemerkung	49
Literaturverzeichnis	52
Verzeichnis der verwendeten Symbole und Begriffe	54



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

Im Jahre 1951 wurde von Nachbin [14] folgender Satz bewiesen: Ist E ein kompakter Raum, der gleichzeitig geordnete Menge mit einer abgeschlossenen Ordnungsrelation $G \subset E \times E$ ist, und ist μ ein Radonmaß auf E mit der Eigenschaft, daß $\mu(f) \geq 0$ für jede isotone stetige reelle Funktion f gilt, dann gibt es ein positives Radonmaß ν auf $G \setminus \Delta$ (wobei Δ die Diagonale in $E \times E$ ist) mit $\|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, derart daß für alle stetigen Funktionen f auf E gilt:

$$\mu(f) = \int_{G \setminus \Delta} (f(y) - f(x)) \, d\nu(x, y).$$

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Frage, ob eine ähnliche Aussage - unter Voraussetzung der Beschränktheit der auftretenden Maße und Funktionen - auch für lokal kompakte geordnete Räume gültig ist. Diese Frage wird im Kernstück dieser Arbeit, dem zweiten Abschnitt von §4, beantwortet: Es zeigt sich, daß die Aussage generell nicht richtig ist, daß sie sich aber beweisen läßt unter einer zusätzlichen Voraussetzung, die in den meisten wichtigen Fällen von vornherein erfüllt ist. Diese Voraussetzung läßt zudem noch zahlreiche äquivalente Umformulierungen zu, und sie ist sogar äquivalent zu der Behauptung des obigen Satzes.

In einigen vorbereitenden Abschnitten wird vor allem auf das Standardwerk über die Theorie der geordneten topologischen Räume, "Topology and Order" von Nachbin [16], Bezug genommen: Im ersten Kapitel werden die Ergebnisse von Nachbin wieder-

gegeben und ergänzt, soweit sie für das Folgende benötigt werden, speziell werden die Begriffe der vollständig regulär geordneten und normal geordneten Räume eingeführt. Die beiden folgenden Kapitel sind als Zusätze und Weiterführungen der Arbeiten von Nachbin in [15], [16] und im ersten Teil von [14] zu betrachten. In §2 werden einige Trennungseigenschaften geordneter topologischer Räume untersucht, in §3 wird für die vollständig regulär geordneten Räume eine zu der Ordnungsrelation passende Kompaktifizierung gebildet und damit werden diese als Unterräume der kompakten geordneten Räume charakterisiert. Die wichtigsten Ergebnisse des ersten Abschnitts von §3 wurden dabei schon von Nachbin [15] veröffentlicht, allerdings ohne Beweis, so daß die Beweise hier nicht unterlassen werden sollen.

Besonders auffällig ist es bei Nachbin [16] und auch in den ersten drei Kapiteln der vorliegenden Arbeit, daß man viele Begriffe und Aussagen findet, die man als Verallgemeinerung von Ergebnissen aus der "üblichen" Topologie (also der Theorie der topologischen Räume ohne Ordnungsstruktur) auffassen kann, wenn man jeweils die diskrete Ordnung zugrundelegt.

Erst im §4 kommt dann die Integrationstheorie ins Spiel, und zwar wird hier der Begriff der "isotonen Maße" eingeführt, d.h. der Maße, die auf den isotonen stetigen beschränkten Funktionen ≥ 0 sind. Das einzige bis jetzt bekannte Ergebnis ist dabei der einleitend zitierte Satz von Nachbin [14].

Im ersten Abschnitt von §4 wird gezeigt, daß die obige Gleichung im Nachbischen Satz für alle μ -integrierbaren Funktionen auf E gültig ist (ohne die Bedingung $\|\nu\| = \frac{1}{2}\|\mu\|$ bekommt man ein etwas schwächeres Resultat); weiterhin erhält man, daß die Lösungsmenge aller Maße ν , die man zu dem obigen Problem finden kann, konvex und kompakt ist. Als Anwendung ergeben sich einige Aussagen über Marginalprobleme, wobei sich mit ähnlichen Problemen vor allem Kellerer ([10], [11]) beschäftigt hat.

Schließlich werden im dritten Abschnitt von §4 die Extrempunkte dieser Lösungsmenge gesucht und es wird hiermit neu bewiesen, daß die Permutationsmatrizen extremal in der Menge der doppelt-stochastischen Matrizen sind.

Den Herren Lembcke, Bliedtner und Leha vom Mathematischen Institut in Erlangen danke ich für viele anregende Gespräche, der Stiftung Mitbestimmung für ihre finanzielle Unterstützung. Mein besonderer Dank gilt meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr.H.Bauer, der diese Arbeit durch viele wertvolle Ratschläge entscheidend gefördert hat.

§1 VORBEREITUNGEN

Vorbemerkung: Die in diesem Kapitel nicht ausgeführten Beweise findet man bei Nachbin [16]. Die meisten Begriffsbildungen dieses Kapitels stammen ebenfalls von Nachbin.

1.1 Geordnete topologische Räume

(1.1.1) Bezeichnungen: Auf einer Menge E sei eine (partielle) Ordnungsrelation " $\leq$ " definiert. Der Graph der Ordnungsrelation werde im folgenden immer mit G_E oder, falls keine Verwechslungen möglich sind, mit G bezeichnet. Außerdem sei Δ_E oder Δ die Diagonale in $E \times E$, also die Menge aller (x, x) mit $x \in E$.

Ist $X \subseteq E$, so seien

$$i(X) := \{ y \in E : \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } x \leq y \} \quad \text{und}$$

$$d(X) := \{ y \in E : \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } x \geq y \}$$

die isotone bzw. antitone Hülle von X .

Für $i(\{x\})$ bzw. $d(\{x\})$ schreibt man auch $i(x)$ bzw. $d(x)$.

X heißt isoton, wenn $X = i(X)$, und

antiton, wenn $X = d(X)$.

Eine Abbildung f von einer geordneten Menge E_1 in eine geordnete Menge E_2 heiße isoton (bzw. antiton), wenn für alle $x, y \in E_1$ mit $x \leq y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$). Ist speziell $E_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$, so sei $\bar{\mathbb{R}}$, falls nichts anderes angegeben ist, mit der üblichen Ordnungsrelation versehen.

(1.1.2) Definition: Ist E ein topologischer Raum, der gleichzeitig mit einer Ordnungsrelation versehen ist, so heiße E geordneter topologischer Raum oder geordneter Raum, wenn der Graph der Ordnungsrelation abgeschlossen in $E \times E$ ist. Sind E_1 und E_2 zwei geordnete Räume, so sei $\mathcal{F}(E_1, E_2)$ die Menge aller stetigen isotonen Funktionen von E_1 nach E_2 . Es sei $\mathcal{F}(E) := \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, und $\mathcal{F}_b(E)$ sei die Menge aller beschränkten Funktionen aus $\mathcal{F}(E)$.

(1.1.3) Bemerkung: Treten im folgenden die Begriffe "kompakter geordneter Raum", "lokal kompakter geordneter Raum" o.. auf, so ist also immer darunter zu verstehen, daß E ein geordneter Raum mit der Zusatzeigenschaft "kompakt", "lokal kompakt" usw. ist.

(1.1.4) Es gelten folgende Aussagen:

(1) Ein topologischer Raum E , der gleichzeitig mit einer Ordnungsrelation versehen ist, ist genau dann ein geordneter Raum, wenn gilt: Für alle $x, y \in E$, für die $x \leq y$ nicht erfüllt ist, gibt es eine isotone Umgebung U von x und eine antitone Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

(2) Jeder geordnete Raum ist ein Hausdorffraum.

(3) Ist E geordneter Raum und $K \subseteq E$ kompakt, so sind $i(K)$ und $d(K)$ abgeschlossen. Insbesondere ist also für alle $x \in E$ $i(x)$ und $d(x)$ abgeschlossen.

Beweis: Siehe Nachbin [16], Prop.1, Prop.2 und Prop.4.

1.2 Vollständig regulär geordnete Räume

(1.2.1) Definition: Ein geordneter topologischer Raum E heiße vollständig regulär geordnet oder VRG-Raum, wenn gilt:

(i) Ist $x \in E$ und U eine Umgebung von x , so gibt es zwei stetige Funktionen $f, g: E \rightarrow [0, 1]$, wobei f isoton und g antiton ist, für die gilt:

$$f(x) = g(x) = 1 \quad \text{und} \quad \inf(f, g) = 0 \quad \text{auf } U^c ;$$

(ii) Sind $x, y \in E$, für die $x \leq y$ nicht gilt, so gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $f(x) > f(y)$.

(1.2.2) Es gelten folgende Aussagen:

- (1) Jeder VRG-Raum ist vollständig regulär.
- (2) Jeder Teilraum eines VRG-Raumes ist ein VRG-Raum.
- (3) Jeder kompakte geordnete Raum ist ein VRG-Raum.
- (4) In einem VRG-Raum bilden die offenen isotonen zusammen mit den offenen antitonen Mengen eine offene Subbasis.

Beweis: Siehe Nachbin [16], Prop.6, Prop.7 und Th.7.

1.3 Normal geordnete Räume

(1.3.1) Definition: Ein geordneter topologischer Raum E heiße normal geordnet, wenn gilt: Sind F_0 und F_1 zwei disjunkte abgeschlossene Mengen in E , wobei F_0 antiton und F_1 isoton ist, dann gibt es zwei disjunkte offene Umgebungen U_i von F_i ($i=0,1$), so daß U_0 antiton und U_1 isoton ist.

(1.3.2) Bemerkungen:

- (1) Ist die Ordnungsrelation von E diskret (d.h. $G_E = \Delta_E$), so ist E genau dann ein VRG-Raum, wenn E vollständig regulär ist, und E ist genau dann normal geordnet, wenn E normal ist.
- (2) Im allgemeinen muß jedoch nicht jeder normal geordnete Raum ein VRG-Raum sein:

Es sei $E = [0,1[$ versehen mit der üblichen Topologie.

Weiterhin sei $G := \Delta \cup \{(0, \frac{1}{n}), (0, 1 - \frac{1}{n}), (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.

Aus dem noch zu beweisenden Satz (1.3.10) geht hervor, daß E normal geordnet ist, denn E ist ein lokal kompakter geordneter Raum mit abzählbarer Basis.

E ist jedoch kein VRG-Raum: Angenommen, es gebe $f \in \mathcal{F}(E, [0,1])$ und $-g \in \mathcal{F}(E, [-1,0])$ mit $f(0)=g(0)=1$ und $\inf(f,g)=0$ auf $[\frac{1}{2}, 1[$. Da f isoton ist, gilt für $n \geq 2$: $f(1 - \frac{1}{n}) = 1$, also ist $g(1 - \frac{1}{n}) = 0$. g ist antiton, somit ist $g(\frac{1}{n})=0$ für alle $n \geq 2$. Das ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von g .

(1.3.3) Satz: Sei E topologischer Raum und gleichzeitig geordnete Menge. Dann sind quivalent:

- (1) E ist normal geordnet.

- (2) Sind F_0 und F_1 zwei disjunkte abgeschlossene Mengen in E , wobei F_0 antiton und F_1 isoton ist, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $f=1$ auf F_1 ($i=0,1$).

Beweis: Siehe Nachbin [16], Th.1.

- (1.3.4) Satz: Sei E ein normal geordneter Raum. Ist $K \subseteq E$ kompakt und $f_0 \in \mathcal{F}(K)$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $\text{Rest}_K f = f_0$.

Beweis: Siehe Nachbin [16], Th.6.

- (1.3.5) Bemerkung: Die Erweiterung von f_0 im vorigen Satz läßt sich sogar so wählen, daß f beschränkt ist und $\|f\| = \|f_0\|$, denn mit f ist auch $\sup \{-\|f_0\|, \inf \{\|f_0\|, f\}\}$ stetig und isoton.

- (1.3.6) Satz: Jeder kompakte geordnete Raum ist normal geordnet.

Beweis: Siehe Nachbin [16], Th.4.

- (1.3.7) Lemma: Ist E ein geordneter Raum mit totaler Ordnung, so ist die Topologie von E feiner als die Ordnungstopologie.

Beweis: Ist $x_0 \in E$ und $y > x_0$, dann gibt es wegen (1.1.4.1) eine isotone Umgebung U von y mit $x_0 \notin U$. Da E total geordnet ist, folgt $U \subseteq \{t \in E: t > x_0\}$, also ist $\{t \in E: t > x_0\}$ offen. Genauso zeigt man, daß $\{t \in E: t < x_0\}$ offen ist. $\cdot/\cdot$.

- (1.3.8) Satz: Ist E ein geordneter Raum mit totaler Ordnung, dann ist E normal geordnet.

Beweis: Seien F_0, F_1 abgeschlossen in E , F_0 antiton, F_1 isoton und $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Ist $F_0^c \cap F_1^c = \emptyset$, dann sind F_0 und F_1 selbst offen.

Gibt es ein $x_0 \in F_0^c \cap F_1^c$, dann sind $U_0 := \{t \in E: t < x_0\}$ und $U_1 := \{t \in E: t > x_0\}$ Mengen, die F_0 bzw. F_1 enthalten mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Wegen (1.3.7) sind U_0 und U_1 offen, außerdem ist U_0 antiton und U_1 isoton. */.

(1.3.9) Satz: E sei ein σ -kompakter lokal kompakter geordneter Raum. Dann ist E normal geordnet.

Beweis: Es seien wiederum F_0, F_1 abgeschlossen in E , F_0 antiton, F_1 isoton, und $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

$(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge kompakter Mengen $\subset E$ mit

$$K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K}_3 \subset K_3 \subset \dots \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = E.$$

Durch vollständige Induktion werden nun Funktionen

$f_n: K_n \rightarrow [0,1]$ bestimmt:

Wegen (1.3.6) gibt es ein $f_1 \in \mathcal{F}(K_1, [0,1])$ mit $f_1 = 1$ auf

$K_1 \cap F_1$ ($i=0,1$).

Sei nun $f_n \in \mathcal{F}(K_n, [0,1])$ bestimmt mit $f_n = i$ auf $K_n \cap F_i$ ($i=0,1$).

Es sei $L_n := K_n \cup (K_{n+1} \cap F_0) \cup (K_{n+1} \cap F_1)$, dann ist L_n kompakt;

sowie $g_n: L_n \rightarrow [0,1]$

$$x \rightarrow \begin{cases} f_n(x) & \text{für } x \in K_n \\ i & \text{für } x \in K_{n+1} \cap F_i \quad (i=0,1), \end{cases}$$

dann ist g_n stetig (da $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$) und isoton.

Wegen (1.3.5) und (1.3.6) läßt sich also ein $f_{n+1} \in \mathcal{F}(K_{n+1}, [0,1])$

bestimmen mit $\text{Rest}_{L_n} f_{n+1} = g_n$, und es ist $f_{n+1} = 1$ auf

$K_{n+1} \cap F_i$ ($i=0,1$).

Für alle $x \in E$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $x \in K_n$; es sei dann $f(x) := f_n(x)$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ $\text{Rest}_{K_n} f_{n+1} = f_n$, ist diese Definition sinnvoll, außerdem ist f stetig (da hiermit $x \in K_{n+1}^\circ$) und isoton.

Für $x \in F_i$ ist $f(x) = i$ ($i=0,1$), also ist E normal geordnet.
 ./.

(1.3.10) Korollar: Jeder lokal kompakte geordnete Raum mit abzählbarer Basis ist normal geordnet.

§2 TRENNUNGSSÄTZE IN GEORDNETEN TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

In diesem Kapitel soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen ein geordneter Raum gewisse Trennungseigenschaften besitzt, die mit der Ordnungsrelation zusammenhängen, wann sich also zwei Mengen durch eine isotone und antitone Umgebung oder durch eine stetige isotone Funktion trennen lassen. Wegen (1.1.4.1) gilt natürlich immer die dem Hausdorffschen Trennungsaxiom entsprechende Tatsache, daß sich zwei verschiedene Punkte durch eine isotone und antitone Umgebung trennen lassen.

2.1 Definition der Trennungseigenschaften

(2.1.1) Definition: Man sagt, ein geordneter Raum E habe die Eigenschaft

T_I , wenn gilt: (i) Ist $K \subseteq E$ kompakt, $F \subseteq E$ abgeschlossen und antiton, und gilt $K \cap F = \emptyset$, dann gibt es eine antitone Umgebung U_0 von F und eine isotone Umgebung U_1 von K mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, und
(ii) die Bedingung (i) ist für die inverse Ordnungsrelation erfüllt, in (i) seien also die Begriffe "isoton" und "antiton" vertauscht;

T_{II} , wenn die Bedingung (i) von Def.(1.2.1) gilt;

T_{III} , wenn die Bedingung (ii) von Def.(1.2.1) gilt;

T_{IV} , wenn gilt: (i) Ist $F \subseteq E$ abgeschlossen und antiton, $x \notin F$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $f=0$ auf F und

$f(x) = 1$, und

(ii) Ist $F \subseteq E$ abgeschlossen und isotone, $x \notin F$, dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $f=1$ auf F und $f(x)=0$.

(2.1.2) Bemerkungen:

(1) Ein geordneter Raum ist genau dann ein VRG-Raum, wenn er T_{II} und T_{III} erfüllt.

(2) Aus jeder der beiden Bedingungen von T_{IV} folgt T_{III} : Gilt nämlich $x \leq y$ nicht, so ist $x \notin d(y)$ und $y \notin i(x)$; $i(x)$ und $d(y)$ aber sind abgeschlossen und isotone bzw. antitone.

(3) Aus T_{IV} folgt auch T_I :

Zunächst gibt es für ein abgeschlossenes antitones F und zu $x \notin F$ eine antitone Umgebung U_0 von F und eine isotone Umgebung U_1 von x mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Aus Kompaktheitsgründen läßt sich dann auch (i) von T_I beweisen (ähnlich wie im Beweis von (2.2.1)).

Der Beweis geht für (ii) von T_I analog.

(4) Ist E normal geordnet, so hat E die Eigenschaften T_I , T_{III} und T_{IV} :

Ist $F \subseteq E$ abgeschlossen und antitone, $x \notin F$, dann ist $i(x)$ abgeschlossen und isotone, und es gilt $F \cap i(x) = \emptyset$. Analog verfährt man für isotones F . Die Anwendung von Satz (1.3.3) ergibt T_{IV} und somit auch T_I und T_{III} .

(5) Ein kompakter geordneter Raum besitzt alle vier Eigenschaften der Def.(2.1.1).

2.2 Trennungseigenschaften lokal kompakter geordneter Räume

(2.2.1) Lemma: Sei E geordneter Raum. Weiterhin sei $K \subseteq E$ kompakt und $x \in E$, so daß für alle $y \in K$ $y \leq x$ nicht gilt (also insbesondere $x \notin K$). Dann gibt es eine antitone Umgebung U_0 von x und eine isotone Umgebung U_1 von K mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Beweis: Wegen (1.1.4.1) gibt es zu jedem $y \in K$ eine offene Menge G_y und eine isotone Menge W_y mit $y \in G_y \subset W_y$, sowie eine antitone Umgebung V_y von x mit $W_y \cap V_y = \emptyset$. $\{G_y: y \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von K , also gibt es $y_1, \dots, y_n \in K$, so daß $\bigcup_{i=1}^n G_{y_i}$ offene Umgebung von K ist. Man setze $U_0 := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ und $U_1 := \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$, dann erfüllen U_0 und U_1 die geforderten Bedingungen.

*/.

(2.2.2) Satz: Ist E ein lokal kompakter geordneter Raum, dann hat E die Eigenschaft T_I .

Beweis: Sei $K \subseteq E$ kompakt, $F \subseteq E$ abgeschlossen und antiton mit $K \cap F = \emptyset$. K besitzt eine kompakte Umgebung K_0 mit $K_0 \cap F = \emptyset$, da E lokal kompakt ist. Wegen (2.2.1) gibt es zu jedem $x \in F$ eine antitone Umgebung V_x von x und eine isotone Umgebung W_x von K_0 mit $V_x \cap W_x = \emptyset$. Man setze $U_0 := \bigcup_{x \in F} V_x$, $U_1 := \bigcap_{x \in F} W_x$; dann ist U_0 antitone Umgebung von F , U_1 ist isotone Umgebung von K sowie $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Somit ist die Bedingung (i) von T_I erfüllt; da aber (2.2.1) auch für die inverse Ordnungsrelation richtig ist, gilt auch (ii) von T_I .

*/.

(2.2.3) Bemerkungen:

(1) Ein lokal kompakter geordneter Raum braucht T_{II} , T_{III} und T_{IV} nicht zu erfüllen:

Es sei Ω die kleinste überabzählbare Ordinalzahl, $\Omega_0 := [1, \Omega[$ und $\Omega' := [1, \Omega]$ seien versehen mit der Ordnungstopologie. Dann ist $E := \Omega_0 \times \Omega'$ lokal kompakt und demnach vollständig regulär, aber nicht normal, denn es sind $A := \{(x, x) : x \in \Omega_0\}$ und $B := \{(x, \Omega) : x \in \Omega_0\}$ abgeschlossen in E , A und B lassen sich aber nicht durch zwei offene Umgebungen trennen (siehe z.B. Kelley [12], S.131 f.). Durch $G := \Delta \cup (A \times B) \cup \{(x, x), (y, y) : x, y \in \Omega_0, x \leq y\} \cup \{(x, \Omega), (y, \Omega) : x, y \in \Omega_0, x \leq y\}$ wird auf E eine abgeschlossene Ordnungsrelation definiert, wie man mit (1.1.4.1) nachweisen kann.

E hat nicht die Eigenschaft T_{II} :

Sei $x := (1, \Omega)$, V eine Umgebung von Ω in Ω' mit $1 \notin V$, dann ist $U := \{1\} \times V$ eine Umgebung von x in E . Angenommen, es gibt $f \in \mathcal{F}(E, [0, 1])$, $-g \in \mathcal{F}(E, [-1, 0])$ mit $f(x) = g(x) = 1$ und $\inf(f, g) = 0$ auf V^c . Dann folgt: $f = 1$ auf B und $g = 1$ auf A . Somit ist $f = 0$ auf A , da $A \cap V = \emptyset$. Also sind $f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ und $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ zwei disjunkte offene Umgebungen von A bzw. B , im Widerspruch zum oben Erwähnten.

Sind $x = (1, \Omega)$ und $y = (2, \Omega)$, dann gilt $y \leq x$ nicht, es gibt aber kein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $f(x) < f(y)$, da sonst wiederum $f^{-1}(-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2}[)$ und $f^{-1}([\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty[)$ disjunkte offene Umgebungen von A und $B \setminus \{x\}$ wären.

Also erfüllt E T_{III} nicht, somit gilt auch T_{IV} nicht.

(2) Ist E ein σ -kompakter lokal kompakter geordneter Raum, so folgt aus (1.3.9) und (2.1.2.4), daß E T_I , T_{III} und T_{IV} erfüllt; in (1.3.2.2) wurde jedoch gezeigt, daß dann T_{II} immer noch nicht gelten muß.

2.3 Zusammenfassung

(2.3.1) Bemerkung: Im allgemeinen hat ein VRG-Raum die Eigenschaften T_I und T_{IV} nicht:

Sei $K = [0,1]^2$; versehen mit der Ordnung $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$:

$\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 = y_2$ wird K ein kompakter geordneter Raum.

Auf $E := [0,1[x(\emptyset \cap [0,1]) \cup \{1\}x([0,1] \setminus \emptyset)$ werde die induzierte Ordnung und Topologie eingeführt. Wegen (1.2.2), (2) und (3) ist also E ein VRG-Raum.

Es ist $K := \{(0,0)\}$ kompakt, $F := \{1\}x([0,1] \setminus \emptyset)$ abgeschlossen und antiton in E . Jede isotone Umgebung von $(0,0)$ enthält aber einen Punkt aus F . Somit ist T_I nicht erfüllt.

Wegen (2.1.2.3) ist also auch T_{IV} nicht erfüllt.

(2.3.2) Somit läßt sich eine Liste aufstellen, aus der zu ersehen ist, ob aus der links angeführten Eigenschaft die oben bezeichnete Eigenschaft folgt. Ist die Aussage richtig, so steht ein "+" an der entsprechenden Stelle, andernfalls ein "-".

	T_I	T_{II}	T_{III}	T_{IV}
lokal kompakter geordneter Raum	+	-	-	-
vollst. regulär geordneter Raum	-	+	+	-
normal geordneter Raum	+	-	+	+
kompakter geordneter Raum	+	+	+	+

§3 EINBETTUNG VON VRG-RÄUMEN IN KOMPAKTE GEORDNETE RÄUME

Im ersten Teil dieses Kapitels soll eine Verallgemeinerung der Stone-Čech-Kompaktifizierung behandelt werden, die die VRG-Räume als Unterräume der kompakten geordneten Räume charakterisiert. Der zweite Teil liefert dann einige Anwendungen der gefundenen Ergebnisse.

3.1 Die Ordnungskompaktifizierung

(3.1.1) Bezeichnungen: In diesem Kapitel sei E ein geordneter topologischer Raum; es sei $\mathcal{F}_1(E) := \mathcal{F}(E, [0, 1])$, entsprechend sei $\mathcal{D}_1(E)$ die Menge aller stetigen antitonen Funktionen von E nach $[0, 1]$.

Sind E_1 und E_2 zwei geordnete Räume, dann werde eine Abbildung $\phi: E_1 \rightarrow E_2$ als Isomorphismus bezeichnet, wenn sie ein Homöomorphismus und zugleich ein Ordnungsisomorphismus (also ordnungstreu in beiden Richtungen) ist.

Ist A eine beliebige Menge, dann werde auf $[0, 1]^A$ die Produkttopologie betrachtet; außerdem werde eine Ordnungsrelation " $<$ " eingeführt wie folgt: Sind $y = (y_a)_{a \in A}$ und $z = (z_a)_{a \in A}$, dann sei $y < z: \Leftrightarrow y_a \leq z_a$ für alle $a \in A$.

Die "kanonische Einbettung" sei die Abbildung $e: E \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}_1(E)}$, die definiert ist durch $e(x) := (\varphi(x))_{\varphi \in \mathcal{F}_1(E)}$.

Im folgenden werde e meist als Surjektion von E auf $e(E)$ verstanden.

Aus der Topologie ist bekannt (siehe z.B. Kelley [12], S.116):

(3.1.2) Einbettungs-Lemma: E sei ein topologischer Raum, F sei eine Familie von stetigen Funktionen, und

$e_F(x) = (f(x))_{f \in F}$. Dann gilt:

- (a) e_F ist stetig.
- (b) e_F ist eine offene Abbildung von E auf $e_F(E)$, wenn F Punkte und abgeschlossene Mengen in E trennt.
- (c) e_F ist genau dann eineindeutig, wenn F die Punkte von E trennt.

(3.1.3) Satz: Ist E ein VRG-Raum, dann ist e ein Isomorphismus zwischen E und $e(E)$.

Beweis: Aus (3.1.2) folgt sofort, daß e stetig und eineindeutig ist.

e ist offen: Sei $x \in E$, U Umgebung von x; z.z. es gibt eine Umgebung V von $e(x)$ in $[0,1]^{\mathcal{I}_1(E)}$ mit $V \cap e(E) \subset e(U)$.

Seien $f \in \mathcal{I}_1(E)$, $g \in \mathcal{D}_1(E)$ mit $f(x)=g(x)=1$, $\inf(f,g)=0$ auf U^c . Dann ist $h=1-g \in \mathcal{I}_1(E)$. Die Mengen $A_f := \{y \in [0,1]^{\mathcal{I}_1(E)} : y_f \neq 0\}$ und $A_h := \{y \in [0,1]^{\mathcal{I}_1(E)} : y_h \neq 1\}$ sind offen; sei $V = A_f \cap A_h$, dann ist $e(x) \in V \cap e(E) \subset e(U)$.

e ist Ordnungsisomorphismus: Sind $x_1, x_2 \in E$, so ist $x_1 \leq x_2$ äquivalent damit, daß für alle $\varphi \in \mathcal{I}_1(E)$ $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ gilt, und dies ist wiederum gleichbedeutend mit $e(x_1) \prec e(x_2)$.
./.

(3.1.4) Satz: Es sind äquivalent:

- (1) E ist ein VRG-Raum.
- (2) E ist isomorph zu einem dichten Teilraum eines kompakten geordneten Raumes.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): $e(E)$ liegt dicht in $\overline{e(E)} \subset [0,1] \mathcal{I}_1(E)$;
somit bleibt noch zu zeigen, daß der Graph G von " $<$ " in
 $[0,1] \mathcal{I}_1(E) \times [0,1] \mathcal{I}_1(E)$ abgeschlossen ist:

Sei $(y,z) \notin G$, dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{I}_1(E)$ mit $y_\varphi > z_\varphi$.

$V_{y,z} := \{w \in [0,1] \mathcal{I}_1(E) : \frac{y_\varphi + z_\varphi}{2} < w_\varphi \leq 1\} \times \{w \in [0,1] \mathcal{I}_1(E) : 0 \leq w_\varphi < \frac{y_\varphi + z_\varphi}{2}\}$
ist dann eine offene Umgebung von (y,z) mit $G \cap V_{y,z} = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) folgt sofort aus (1.2.2), (2) und (3). $\cdot/$.

(3.1.5) Definition: Ein kompakter geordneter Raum E^* heißt Ordnungskompaktifizierung von E , wenn es einen Isomorphismus
 ϕ von E auf eine in E^* dichte Teilmenge gibt, so daß gilt:
Jedes $f \in \mathcal{I}_1(\phi(E))$ besitzt eine stetige isotone Fortsetzung
auf E^* .

(3.1.6) Lemma: Seien A, B Mengen, $f: A \rightarrow B$ sei eine beliebige
Abbildung. Dann ist die Abbildung $f^*: [0,1]^B \rightarrow [0,1]^A$, definiert durch $f^*(y) = y \circ f$ stetig und isoton bezüglich " $<$ ".

Beweis: Die Stetigkeit von f^* ist bekannt (siehe z.B.
Kelley [12], S.152).

f^* ist isoton: Seien $y, z \in [0,1]^B$, $y < z$. Dann gilt für alle
 $a \in A$: $f^*(y)_a = (y \circ f)_a = y_{f(a)} \leq z_{f(a)} = f^*(z)_a$, also ist
 $f^*(y) < f^*(z)$. $\cdot/$.

(3.1.7) Satz: Sei E ein VRG-Raum, K ein kompakter geordneter
Raum, $f \in \mathcal{I}(E, K)$. Dann kann $f \circ e^{-1}$ zu einem $g \in \mathcal{I}(\overline{e(E)}, K)$
fortgesetzt werden.

Beweis: Es seien

$$\begin{array}{ccc} f^*: \mathcal{I}_1(K) \rightarrow \mathcal{I}_1(E) & & f^{**}: [0,1] \mathcal{I}_1(E) \rightarrow [0,1] \mathcal{I}_1(K) \\ \varphi \rightarrow \varphi \circ f & , & q \rightarrow q \circ f \end{array}$$

sowie $e_K: K \rightarrow [0,1] \mathcal{I}_1(K)$ die e entsprechende
 $x \rightarrow (\varphi(x))_{\varphi \in \mathcal{I}_1(K)}$ Abbildung auf K.

Dann ist e ein Isomorphismus von E auf $e(E) \subset \overline{e(E)}$ und

e_K ein Isomorphismus von K auf $e_K(K) = \overline{e_K(K)}$.

Wegen (3.1.6) ist f^{**} stetig und isoton. Für alle $x \in E$ und

$h \in \mathcal{I}_1(K)$ gilt $(f^{**} \circ e)(x)(h) = (e(x) \circ f^*)(h) = e(x)(h \circ f) =$
 $= h \circ f(x) = e_K(f(x))(h) = (e_K \circ f)(x)(h)$. Daraus folgt

$f^{**} \circ e = e_K \circ f$, insbesondere ist also $f^{**} \circ e(E) \subset e_K(K)$; wegen
der Stetigkeit von f^{**} gilt somit $f^{**}(\overline{e(E)}) \subset \overline{e_K(K)} = e_K(K)$.

$e_K^{-1} \circ f^{**}$ (von $\overline{e(E)}$ nach K) ist eine stetige Fortsetzung von
 $f \circ e^{-1}$ (von $e(E)$ nach K). Außerdem ist $e_K^{-1} \circ f^{**}$ isoton, da
 f^{**} isoton ist.

*/.

(3.1.8) Satz: Zu jedem VRG-Raum gibt es eine bis auf Iso-
morphie eindeutig bestimmte Ordnungskompaktifizierung.

Beweis: In (3.1.3) und (3.1.7) wurde gezeigt, daß $\overline{e(E)}$ eine
Ordnungskompaktifizierung von E ist. Sei nun E^* eine weitere
Ordnungskompaktifizierung, ϕ der zugehörige Isomorphismus.

Es sei $e^*: E^* \rightarrow [0,1] \mathcal{I}_1(E^*)$

$x \rightarrow (\varphi(x))_{\varphi \in \mathcal{I}_1(E^*)}$, dann ist e^* ein Isomor-
phismus von E^* auf $e^*(E^*) = \overline{e^*(E^*)}$.

Außerdem ist die Abbildung $\tau: \mathcal{I}_1(E^*) \rightarrow \mathcal{I}_1(E)$, definiert

durch $\tau(\varphi) := \varphi \circ \phi$ eine Bijektion, da E^* Ordnungskompakti-
fizierung von E ist. Somit ist $[0,1] \mathcal{I}_1(E)$ isomorph zu

$[0,1] \mathcal{I}_1(E^*)$, daraus folgt aber, daß $\overline{e(E)}$ auch isomorph zu

$\overline{e^*(\phi(E))}$ ist, da e auf E und e^* auf $\phi(E)$ in analoger Weise
definiert sind.

Insgesamt ist also E^* isomorph zu $\overline{e(E)}$.

*/.

(3.1.9) Bemerkung: Nachbin definiert in [15] als "Kompaktifizierung" eines geordneten topologischen Raumes E einen kompakten geordneten Raum E^* , so daß gilt: (1) E ist isomorph zu einem dichten Teilraum von E^* , und (2) Unter allen abgeschlossenen Ordnungsrelationen auf E^* , für die dieser dichte Teilraum ein geordneter Teilraum ist, hat die gegebene Relation den kleinsten Graphen. Außerdem definiert er in der üblichen Weise eine Präordnung auf der Menge aller "Kompaktifizierungen" und kommt dann zu folgendem Ergebnis:

Jeder VRG-Raum E besitzt eine "Kompaktifizierung" $\beta(E)$, die bis auf einen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist, und die folgende äquivalente Eigenschaften besitzt:

- (a) $\beta(E) \geq E^*$ für jede "Kompaktifizierung" E^* .
- (b) Jede beschränkte Funktion $f_0 \in \mathcal{F}(\phi(E))$ läßt sich zu einem $f \in \mathcal{F}(\beta(E))$ fortsetzen (dabei sei ϕ der Isomorphismus zwischen E und dem dichten Teilraum von $\beta(E)$).
- (c) Ist K ein kompakter geordneter Raum, dann läßt sich jedes $f_0 \in \mathcal{F}(\phi(E), K)$ zu einem $f \in \mathcal{F}(\beta(E), K)$ fortsetzen.

Dieses Ergebnis folgt sofort aus den vorher bewiesenen Sätzen, und $\beta(E)$ ist "die" Ordnungskompaktifizierung im Sinne von Def.(3.1.5).

Es bleibt noch zu bemerken, daß sich nicht jede Kompaktifizierung (im üblichen Sinn verstanden) zu einer "Kompaktifizierung" im Sinn der Definition von Nachbin machen läßt.

Ist z.B. $E =]0,1[$, versehen mit der üblichen Ordnung, so ist die Ordnungskompaktifizierung von E isomorph zu $[0,1]$; da diese jedoch maximal bezüglich der oben erwähnten Prä-

ordnung ist, läßt sich auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung von E keine Ordnung finden, so daß E ein geordneter Teilraum wird.

(3.1.10) Bemerkung: Sei E ein topologischer Raum, K ein kompakter Raum und Q sei eine Familie von stetigen Funktionen von E nach K . Eine Q -Kompaktifizierung von E heißt jeder kompakte Raum E^* , für den gilt: (1) E ist homöomorph zu einem dichten Teilraum $\phi(E)$ von E^* , (2) Für alle $f \in Q$ ist $f \circ \phi^{-1}$ stetig fortsetzbar auf E^* , und (3) Die Menge aller dieser Fortsetzungen trennt die Punkte von $\Delta' = E^* \setminus \phi(E)$. (siehe Meghea [13], S.53 ff., oder Constantinescu-Cornea [7], S.96 ff.). Ist E vollständig regulär, so läßt sich zeigen, daß es bis auf Homöomorphie genau eine Q -Kompaktifizierung gibt, falls E lokal kompakt ist oder Q Punkte und abgeschlossene Mengen in E trennt.

In dem hier behandelten Fall ist $Q = \mathcal{F}_1(E)$, demnach sind (1) und (2) nach Definition erfüllt, (3) gilt aber auch, da jeder kompakte geordnete Raum ein VRG-Raum ist. Also folgt, daß jede Ordnungskompaktifizierung auch eine $\mathcal{F}_1(E)$ -Kompaktifizierung ist. Die Umkehrung gilt jedoch nur, wenn auf der $\mathcal{F}_1(E)$ -Kompaktifizierung die richtige Ordnungsrelation gewählt wird, nämlich die mit dem minimalen Graphen, so daß E auch noch ordnungsisomorph zu $\phi(E)$ wird.

3.2 Anwendungen der Ordnungskompaktifizierung

Nunmehr sollen noch zwei Folgerungen aus den Resultaten von (3.1) gezogen werden; die erste Folgerung ist eine Analogie zu (1.3.4), die zweite bildet eine Verallgemeinerung von Nachbin [14], Th.3:

(3.2.1) Satz: Sei E ein VRG-Raum, $K \subseteq E$ sei kompakt und $f_0 \in \mathcal{F}(K)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{F}(E)$ mit $\|f\| = \|f_0\|$ und $\text{Rest}_K f = f_0$.

Beweis: $\hat{f}_0 := f_0 \circ e^{-1}$ ist eine stetige isotone Funktion von $e(K)$ nach $\mathbb{R}$ mit $\|\hat{f}_0\| = \|f_0\|$. Wegen (1.3.4) und (1.3.6) gibt es ein $\hat{f} \in \mathcal{F}(\overline{e(E)})$ mit $\|\hat{f}\| = \|\hat{f}_0\|$ und $\text{Rest}_{e(K)} \hat{f} = \hat{f}_0$. Man setze $f = \text{Rest}_{e(E)} \hat{f} \circ e$, dann erfüllt f die geforderten Bedingungen. */.

(3.2.2) Satz: Sei E ein kompakter geordneter Raum. Dann ist $\mathcal{F}(E)$ ein punktetrennender, abgeschlossener, sup- und inf-stabiler Kegel in $\mathcal{C}(E)$, der die konstanten Funktionen enthält. Ist umgekehrt ein kompakter Raum E gegeben und eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(E)$, die die oben erwähnten Eigenschaften besitzt, dann gibt es genau eine Möglichkeit, E zu einem kompakten geordneten Raum zu machen, so daß $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ wird. Der Beweis dieses Satzes findet sich bei Nachbin [14], Th.3.

(3.2.3) Satz: Sei E ein lokal kompakter VRG-Raum. Dann ist $\mathcal{F}_b(E)$ ein punktetrennender, abgeschlossener, sup- und inf-

stabiler Kegel in $\mathcal{C}_b(E)$ (=Menge aller stetigen beschränkten reellen Funktionen auf E), der die konstanten Funktionen enthält. Ist umgekehrt ein lokal kompakter Raum E gegeben und eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_b(E)$, die die oben erwähnten Eigenschaften besitzt, dann gibt es genau eine Möglichkeit, E zu einem VRG-Raum zu machen, so daß $\mathcal{F} = \mathcal{F}_b(E)$ wird.

Beweis: Die erste Hälfte der Behauptung ist klar.

Ebenso folgt sofort, daß es höchstens eine Möglichkeit gibt, denn in einem VRG-Raum gilt $a \leq b$ genau dann, wenn $f(a) \leq f(b)$ für alle $f \in \mathcal{F}_b(E)$ gilt.

Bleibt noch die Existenz zu zeigen: E^* sei eine $\mathcal{F}$ -Kompaktifizierung von E , dann erfüllt $\mathcal{F}^* :=$ Menge aller "Fortsetzungen von $\mathcal{F}$ " alle Bedingungen, die an $\mathcal{F}$ gestellt wurden.

Wegen (3.2.2) läßt sich also E^* zu einem kompakten geordneten Raum machen, so daß $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}(E^*)$ wird. Somit wird E in kanonischer Weise zu einem VRG-Raum, und es gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_b(E)$, da $\mathcal{F}$ die Menge aller "Restriktionen von $\mathcal{F}^*$ " ist.

·/.

§4 POSITIVE RADONMASSE AUF DEM GRAPHEN EINER ORDNUNGS- RELATION

Bezeichnungen: In diesem Kapitel sei nun E immer (ausgenommen im Abschnitt 3) ein lokal kompakter geordneter Raum.

Ist X ein lokal kompakter Raum, so sei $\mathcal{M}(X)$ die Menge aller Radonmaße auf X , $\mathcal{M}^+(X)$ die Menge aller positiven Maße auf X , $\mathcal{M}_b(X)$ die Menge aller beschränkten Maße auf X , sowie $\mathcal{M}_b^+(X) = \mathcal{M}^+(X) \cap \mathcal{M}_b(X)$. (Es sollen die Begriffe von Bourbaki [5] verwendet werden. Insbesondere bedeute also "Maß" immer "Radonmaß".) Ist Y ein lokal kompakter Teilraum von X , so kann jedes $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ in kanonischer Weise auch als $\mu \in \mathcal{M}(X)$, für das dann $X \setminus Y$ eine $|\mu|$ -Nullmenge ist, aufgefaßt werden, und umgekehrt. Bei den weiteren Überlegungen, insbesondere bei einigen Beweisen, soll in einem solchen Fall kein Unterschied mehr in der Bezeichnungsweise gemacht werden.

Weiterhin sei $\mathcal{C}(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf X , und $\mathcal{K}(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

Ist $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine beliebige numerische Funktion, dann sei $N_f := \{(x, y) \in E \times E: f(x) = f(y) = -\infty \text{ oder } f(x) = f(y) = +\infty\}$.

Für alle $(x, y) \in (E \times E) \setminus N_f$ werde definiert:

$$f^*(x, y) := f(y) - f(x) .$$

4.1 Beziehungen zwischen $\mathcal{M}^i(E)$ und $\mathcal{M}_b^+(G)$

(4.1.1) Definition: Ein beschränktes Maß μ auf E heiße isoton, wenn für jedes $f \in \mathfrak{F}_b(E)$ gilt: $\int_E f \, d\mu \geq 0$.

$\mathcal{M}^i(E)$ sei die Menge aller beschränkten isotonen Radonmaße auf E .

(4.1.2) Satz: Sei $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G)$. Dann gibt es genau ein $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$, so daß $\mu(f) = \int_G f^* \, d\nu$ für alle $f \in \mathcal{K}(E)$ erfüllt

ist. Für dieses μ gilt: $\frac{1}{2} \|\mu\| \leq \|\nu\|$.

Beweis: Es ist $\frac{1}{2} \|\mu\| = \sup \{ \mu(f) : f \in \mathcal{K}(E), \|f\| \leq 1 \} \leq$
 $\sup \left\{ \int_G f^* \, d\nu : f \in \mathcal{K}(E), \|f^*\| \leq 1 \right\} \leq \sup \left\{ \int_G g \, d\nu : g \in \mathcal{C}(G), \|g\| \leq 1 \right\}$
 $= \|\nu\|$.

Also ist μ beschränkt und damit ein Radonmaß. ./.

(4.1.3) Definition: Es seien für alle $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$

$$\underline{C}_\mu' = \{ \nu \in \mathcal{M}_b^+(G) : \int_G f^* \, d\nu = \mu(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{K}(E) \},$$

$$\underline{C}_\mu = \{ \nu \in \underline{C}_\mu' : \|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\| \}.$$

(4.1.4) Bemerkungen:

(1) Ist $\nu \in \underline{C}_\mu'$ und $\varrho \in \mathcal{M}_b(\Delta)$ mit $\varrho \leq \nu$, so ist auch $\nu - \varrho \in \underline{C}_\mu'$ (denn es ist stets $f^* = 0$ auf Δ).

(2) Ist $\nu \in \underline{C}_\mu$, so ist $\nu(\Delta) = 0$. Andernfalls wäre nämlich $\|\nu - \nu_\Delta\| < \|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, und da wegen (1) $\nu - \nu_\Delta \in \underline{C}_\mu'$, stellt dies einen Widerspruch zu (4.1.2) dar.

Da $G \setminus \Delta$ lokal kompakt ist, kann also jedes $\nu \in C_\mu$ auch als Element von $\mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ betrachtet werden.

(4.1.5) Lemma: Für $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$ gelten folgende Aussagen:

(1) C_μ und C'_μ sind konvex.

(2) $\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_b(E)} C_\mu = \mathcal{M}_b^+(G)$.

(3) Sind μ_1 und $\mu_2 \in \mathcal{M}_b(E)$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$, dann ist

$$C'_{\mu_1} \cap C'_{\mu_2} = \emptyset.$$

(4) $\bigcup_{\lambda \geq 0} C_{\lambda\mu}$ ist ein konvexer spitzer Kegel mit Basis C_μ .

Alle Aussagen lassen sich ohne Schwierigkeit nachprüfen.

(4.1.6) Bemerkung: Es läßt sich also eine lineare Abbildung

$T^*: \mathcal{M}_b(G) \rightarrow \mathcal{M}_b(E)$ definieren mit $T^*(\nu) = \mu$, falls $\nu \in C'_\mu$.

Ist E speziell kompakt, dann ist T^* sogar eine Diffusion, also stetig in der vagen Topologie:

$$\varphi: G \rightarrow \mathcal{M}(E)$$

$$(x, y) \rightarrow \varepsilon_y - \varepsilon_x \quad \text{ist eine stetige Abbildung.}$$

Es sei $T: \mathcal{K}(E) \rightarrow \mathcal{K}(G)$ definiert durch $T(f) = f^*$, dann ist

für alle $(x, y) \in G$ $(T(f))(x, y) = \varphi(x, y)(f)$. Aus dem Satz über Diffusionen (siehe Choquet [6], Prop. 14.12) folgt aber,

daß die duale Abbildung zu T eine Diffusion ist; diese ist aber gerade T^* , denn für alle $\nu \in \mathcal{M}(G)$ und alle $f \in \mathcal{K}(E)$ ist $T^*(\nu)(f) = \nu(f^*) = \nu(T(f))$.

(4.1.7) Lemma: Sei $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G)$. Dann sind äquivalent:

(1) Es gibt ein $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$ mit $\nu \in C_\mu$.

(2) $\|\nu\| = \sup \left\{ \int_G f^* d\nu : f \in \mathcal{K}(E), \|f\| \leq \frac{1}{2} \right\}$.

Der Beweis folgt sofort aus dem Beweis von (4.1.2).

(4.1.8) Satz: Es seien $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$, $\nu \in C'_\mu$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei μ -integrierbar. Weiterhin sei f $\pi_1(\nu)$ - und $\pi_2(\nu)$ -integrierbar, wobei π_1 und π_2 die beiden Projektionen von $E \times E$ seien.

Dann ist f^* ν -integrierbar und es gilt

$$\int_E f \, d\mu = \int_G f^* \, d\nu .$$

Beweis: Die Funktionen $f_1(x,y) := f(x)$ und $f_2(x,y) := f(y)$ sind nach Voraussetzung ν -integrierbar, also auch $f^* = f_2 - f_1$. Es sei nun $\varepsilon > 0$; f sei zunächst beschränkt.

Da f $\pi_1(\nu)$ -integrierbar ist, gibt es Kompakta $K_i \subset E$ ($i=1,2$), so daß gilt: $\text{Rest}_{K_1 \times E} f_1$ ist stetig und $\nu(K_1^c \times E) < \frac{\varepsilon}{2}$,

sowie: $\text{Rest}_{E \times K_2} f_2$ ist stetig und $\nu(E \times K_2^c) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Außerdem gibt es ein Kompaktum $K_3 \subset E$, so daß $\text{Rest}_{K_3} f$ stetig ist und $|\mu|(K_3^c) < \varepsilon$.

Setzt man $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, dann ist $\text{Rest}_{K \times K} f^* = \text{Rest}_{K \times K} (f_2 - f_1)$ stetig und $\nu((K \times K)^c) < \varepsilon$, sowie $\text{Rest}_K f$ stetig und $|\mu|(K^c) < \varepsilon$.

Es gibt ein $g \in \mathcal{H}(E)$ mit $\|g\| = \|f\|_K$ und $g = f$ auf K .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f \, d\mu - \int_G f^* \, d\nu \right| \leq \left| \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu \right| + \\ & + \left| \int_E g \, d\mu - \int_G g^* \, d\nu \right| + \left| \int_G g^* \, d\nu - \int_G f^* \, d\nu \right| \leq \\ & \left| \int_{K^c} (f - g) \, d\mu \right| + 0 + \left| \int_{(K \times K)^c} (g^* - f^*) \, d\nu \right| \leq \end{aligned}$$

$\varepsilon \cdot 2\|f\| + 0 + \varepsilon \cdot 4\|f\| = \varepsilon \cdot 6\|f\|$, woraus sich die behauptete Gleichheit für beschränktes f ergibt.

Ist nun f eine beliebige μ -integrierbare Funktion, dann seien für alle $n \in \mathbb{N}$ $g_n := \sup\{-n, \inf\{f, n\}\}$. Da f $\pi_1(\nu)$ - und $\pi_2(\nu)$ -integrierbar ist, sind dies auch die g_n , also ist g_n^* ν -integrierbar. Wegen dem vorher Gezeigten gilt $\int_E g_n d\mu = \int_G g_n^* d\nu$. Die g_n^* konvergieren fast überall gegen f^* (i.a. konvergieren sie nicht überall, weil f^* nicht auf ganz G definiert zu sein braucht) und es gilt $|g_n^*| \leq |f^*|$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt also:

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G g_n^* d\nu = \int_G f^* d\nu .$$

*/.

(4.1.9) Bemerkungen:

(1) Aus dem letzten Satz ergibt sich sofort, daß jedes $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$, für das C_μ^+ nicht leer ist, isoton sein muß. Ist nämlich $\nu \in C_\mu^+$, so gilt für alle $f \in \mathcal{F}_b(E)$:

$$\int_E f d\mu = \int_G f^* d\nu \geq 0, \text{ da } f^* \geq 0 \text{ auf } G \text{ erfüllt ist.}$$

Insbesondere folgt also, daß das in (4.1.2) bestimmte Maß μ isoton ist.

(2) Die Aussage des Satzes (4.1.8) gilt nicht mehr, wenn man die Voraussetzung " f $\pi_1(\nu)$ - und $\pi_2(\nu)$ -integrierbar" wegläßt: Es sei $E = [0, 1]$ mit der üblichen Topologie und Ordnung, dann ist $\mu = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ isoton und beschränkt. Für alle $g \in \mathcal{K}(G)$ werde definiert: $\nu(g) = \int_0^1 g(x, 1) dx + \int_0^1 g(0, y) dy$.

Dann ist $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G)$, und für alle $f \in \mathcal{C}(E)$ ist $\int_E f d\mu = \int_G f^* d\nu$, also ist $\nu \in C_\mu^+$.

Ist f_0 eine nicht $\lambda_{[0,1]}$ -integrierbare Funktion, die in 0 und 1 endliche Werte annimmt, dann ist f_0 μ -integrierbar mit $\int_E f_0 d\mu = f_0(1) - f_0(0)$; f_0^* ist jedoch nicht ν -integrierbar.

(4.1.10) Korollar: Die Aussage des Satzes (4.1.8) ist richtig für alle beschränkten nach unten (bzw. nach oben) halbstetigen $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

(4.1.11) Korollar: Es seien $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$ und $\nu \in C'_\mu$.

Ist $A \subset E$ Borelmenge, dann gilt: $\mu(A) = \nu(A^c x A) - \nu(A x A^c)$.

Ist A zudem isotone, dann ist $\mu(A) = \nu(A^c x A)$.

Beweis: Wendet man (4.1.8) auf $f = 1_A$ an, so ergibt sich die erste Beziehung, denn $f^* = 1_{A^c x A} - 1_{A x A^c}$. Die zweite Beziehung folgt daraus, daß für isotones A gilt: $G \cap (A x A^c) = \emptyset$.
./.

(4.1.12) Korollar: $C'_0 = \mathcal{M}_b^+(\Delta)$.

Beweis: Aus der Definition von C'_0 folgt sofort $\mathcal{M}_b^+(\Delta) \subset C'_0$.

Es sei nun $\nu \in C'_0$ und $(x, y) \in G \setminus \Delta$, dann gibt es kompakte Umgebungen K_1 von x und K_2 von y , so daß für alle $(u, v) \in K_1 x K_2$ gilt: $v \not\leq u$. Aus (4.1.11) folgt dann:

$$0 = \nu((i(K_2)^c) x i(K_2)) \geq \nu(K_1 x K_2),$$

also liegt (x, y) nicht im Träger von ν .

./.

(4.1.13) Korollar: Ist $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$, dann ist $C'_\mu \cap \mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$

"total ungeordnet" bezüglich der üblichen Ordnungsrelation

in $\mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$, d.h. sind $\nu_1, \nu_2 \in C'_\mu \cap \mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ mit $\nu_1 \neq \nu_2$,

so gilt weder $\nu_1 \leq \nu_2$ noch $\nu_2 \leq \nu_1$.

Beweis: Ist z.B. $\nu_1 \leq \nu_2$, so ist $\nu_2 - \nu_1 \in C_0^+$. Wegen (4.1.12) folgt daraus $\nu_1 = \nu_2$. $\cdot/\cdot$

(4.1.14) Lemma: Es sei $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$, $\nu \in C_\mu^+$ und $K \subset E$ kompakt. Dann gilt

$$\nu(KxK) \geq |\mu|(K) - \|\nu\|.$$

Beweis: Sei H offen in E , dann gilt:

Ist $f \in \mathcal{K}(E)$ mit $\|f\| \leq 1$ und $f=0$ auf H^c , dann ist die Funktion $g = \sup\{0, f^*-1\}$ stetig auf ExE , wegen $f^* \leq 2$ ist $0 \leq g \leq 1$, auf $(HxH)^c$ ist $f^* \leq 1$, also ist dort $g=0$, und es ist auf ExE $f^*-g \leq 1$. Dies liefert folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\nu\| = \nu(1) &\geq \sup_G \left\{ \int_G (f^*-g) d\nu : f \in \mathcal{K}(E), g \in \mathcal{C}(ExE, [0,1]), \right. \\ &\quad \left. g=0 \text{ auf } (HxH)^c, f^*-g \leq 1 \right\} \geq \\ &\sup \left\{ \int_G f^* d\nu - \nu(HxH) : f \in \mathcal{K}(E), \|f\| \leq 1, f=0 \text{ auf } H^c \right\} = \\ &\sup \left\{ \mu(f) : f \in \mathcal{K}(E), \|f\| \leq 1, f=0 \text{ auf } H^c \right\} - \nu(HxH) = \\ &|\mu|(H) - \nu(HxH), \text{ also ist } \nu(HxH) \geq |\mu|(H) - \|\nu\|. \end{aligned}$$

Bildet man das Infimum über alle $H \supset K$, so ergibt sich die Behauptung, denn die Menge aller so gebildeten HxH bildet eine Umgebungsbasis von KxK . $\cdot/\cdot$

(4.1.15) Korollar: Ist $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$, $\nu \in C_\mu^+$ und $K \subset E$ kompakt, so folgt:

$$\nu((KxK)^c) \leq |\mu|(K^c).$$

(4.1.16) Satz: Seien $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$, $\nu \in C_\mu^+$. Dann sind $\pi_1(\nu)$ und $\pi_2(\nu)$ totalstetig bezüglich $|\mu|$.

Beweis: Sei A eine $|\mu|$ -Nullmenge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $K \subset A^c$ mit $|\mu|(K^c) < \varepsilon$. Wegen (4.1.15) ist also $\nu((KxK)^c) < \varepsilon$. Daraus folgt: $\pi_1(\nu)^*(A) \leq \pi_1(\nu)(K^c) =$

$= \nu(K^c x E) \leq \nu((KxK)^c) < \varepsilon$, also ist A eine $\pi_1(\nu)$ -Nullmenge.

In analoger Weise verläuft der Beweis für $\pi_2(\nu)$. $\cdot/\cdot$

(4.1.17) Bemerkung: Ist $\nu \in C_\mu$, dann braucht ν nicht totalstetig bezüglich $|\mu| x |\mu|$ zu sein:

Es sei $E = [-1, +1]$ mit der üblichen Topologie und Ordnung, $\mu = \text{id} \cdot \lambda_{[-1, +1]}$, also das Lebesguemaß auf $[-1, +1]$ mit der Dichtefunktion $x \rightarrow x$. Es sei $A = \{(-x, x) \in ExE: x \geq 0\}$, für alle $g \in \mathcal{C}(ExE)$ werde definiert $\nu(g) = \int_0^1 g(-x, x) dx$.

Dann ist $\nu \in C_\mu$ und $|\mu| x |\mu|(A) = 0$, aber $\nu(A) = 1$.

(4.1.18) Satz: Ist $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$, $\nu \in C_\mu$ und $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -integrierbar, dann gilt: f^* ist ν -fast überall definiert und ν -integrierbar, und es ist

$$\int_E f d\mu = \int_G f^* d\nu.$$

Beweis: Sei zunächst wiederum f beschränkt.

Wegen (4.1.16) sind $\pi_1(\nu)$ und $\pi_2(\nu)$ totalstetig bezüglich $|\mu|$, also ist f $\pi_1(\nu)$ - und $\pi_2(\nu)$ -integrierbar. Aus (4.1.8) folgt dann die Behauptung.

Es werde nun die Beschränktheit von f nicht mehr vorausgesetzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien wiederum $g_n := \sup\{-n, \inf\{f, n\}\}$.

Man wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ Kompakta $K_n \subset \{|f| < n\}$, so daß

$|\mu|(K_n) \geq |\mu|(\{|f| < n\}) - 2^{-n}$. Dann gilt wegen (4.1.15)

$\nu^*(\{|f^*| < 2n\}^c) \leq \nu((K_n x K_n)^c) \leq |\mu|(K_n^c)$, und daraus folgt:

$$\int^* 2 \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{|f^*| < 2n\}^c} d\nu \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \nu^*(\{|f^*| < 2n\}^c) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(K_n^c) \leq 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(\{|f| \geq n\}) + 1 \right) \leq \\ &\leq 2 \cdot (\|\mu\| + |\mu|(|f|) + 1) < \infty. \end{aligned}$$

Auf dem Definitionsbereich von f^* gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|g_n^*| \leq |f^*| \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{|f^*| < 2k\}}^c.$$

Die g_n^* konvergieren auf $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (K_k \times K_k)$ punktweise gegen f^* ,

und da $\nu(S) = \|\nu\|$ (dies folgt aus (4.1.15) und der $|\mu|$ -Integrierbarkeit von f), konvergieren sie fast überall. Demnach

ist die Menge N_f , auf der f^* nicht definiert ist, eine ν -Nullmenge, f^* ist ν -integrierbar, und aus dem Lebesgueschen

Konvergenzsatz folgt wiederum $\int_E f \, d\mu = \int_G f^* \, d\nu$.
./.

(4.1.19) Korollar: Es seien $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$ und $\nu \in C_\mu$.

Ist $A \in E$ μ -meßbar, so sind $A^c \times A$ und $A \times A^c$ ν -meßbar mit $\mu(A) = \nu(A^c \times A) - \nu(A \times A^c)$.

Ist A zudem isoton, dann ist $\mu(A) = \nu(A^c \times A)$.

Der Beweis verläuft genau wie der Beweis von (4.1.11) unter Beachtung von (4.1.18).

(4.1.20) Satz: Für alle $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$ ist C_μ konvex und kompakt (in der vagen Topologie).

Beweis: Daß C_μ konvex ist, wurde bereits in (4.1.5) erwähnt.

Sei $(\nu_i)_{i \in S}$ ein konvergentes Netz mit $\nu_i \in C_\mu$ und

$$\nu := \lim_{i \in S} \nu_i \in \mathcal{M}^+(G).$$

$\mathcal{K}$ sei die Menge aller Kompakta in E , dann folgt wegen

(4.1.15):

$$\begin{aligned} \|\nu\| &\geq \sup_{K \in \mathcal{K}} \limsup_{i \in S} \nu_i(K \times K) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}} \left(\frac{1}{2} \|\mu\| - |\mu|(K^c) \right) = \\ &= \sup_{K \in \mathcal{K}} |\mu|(K) - \frac{1}{2} \|\mu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\|\nu\| \leq \liminf_{i \in S} \|\nu_i\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, also ist $\|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$.

Somit gilt für alle beschränkten $g \in \mathcal{C}(G)$:

$$\lim_{i \in S} \int_G g \, d\nu_i = \int_G g \, d\nu.$$

Insbesondere folgt für alle $f \in \mathcal{K}(E)$:

$$\mu(f) = \lim_{i \in S} \int_G f^* \, d\nu_i = \int_G f^* \, d\nu, \text{ also ist } \nu \in C_\mu.$$

Folglich ist C_μ abgeschlossen in $\mathcal{M}^+(G)$. Außerdem ist

$$C_\mu \subset \{ \nu \in \mathcal{M}(G) : \|\nu\| \leq \frac{1}{2} \|\mu\| \}, \text{ also ist } C_\mu \text{ kompakt. } \quad ./.$$

(4.1.21) Bemerkung: C'_μ ist im allgemeinen nicht einmal abgeschlossen: Es sei $E = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ mit der üblichen Topologie und Ordnung, $\mu = \xi_1 - \xi_0$. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ seien $\nu_n = \xi_{(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, 1)} + \xi_{(0, \frac{1}{2}-\frac{1}{n})}$. Dann sind alle $\nu_n \in C'_\mu$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = 0 \notin C'_\mu$.

(4.1.22) Anwendung: Projektionen von Radonmaßen

(1) Problemstellung: Es seien E_1 und E_2 zwei lokal kompakte Räume, $\mu_i \in \mathcal{M}_b^+(E_i)$ ($i=1,2$) und $\|\mu_1\| = \|\mu_2\| = 1$.

Gesucht ist die Menge P aller Radonmaße ν auf $E_1 \times E_2$, deren Marginalmaße die μ_i sind, daß also die μ_i die i -ten Projektionen von ν sind ($i=1,2$). (Daß $P \neq \emptyset$ gilt, ist klar, denn das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ liegt in P).

(2) Lösung des Problems: Es sei E die "topologische Summe" von E_1 und E_2 ; d.h. $E = (E_1 \times \{1\}) \cup (E_2 \times \{2\})$, wobei die Topo-

logie auf $E_1 x\{i\}$ "gleich" der von E_1 sei. Sind keine Verwechslungen möglich (etwa indem E_1 und E_2 als disjunkt angenommen werden), so schreibt man für $(x,i) \in E_1 x\{i\}$, $M x\{i\} \subset E_1 x\{i\}$ u.ä. auch x, M usw. Auf E werde eine Ordnungsrelation eingeführt durch $G := \Delta \cup (E_1 \times E_2)$. G ist abgeschlossen, und mit $\mu := \mu_2 - \mu_1$ (dies ist im Sinn der Vorbemerkungen von §4 zu verstehen) ist $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$ und $\|\mu\| = 2$.

Es ist nun leicht einzusehen, daß $\underline{P} = \underline{C_\mu}$ gilt, denn $\nu \in C_\mu$ ist gleichbedeutend damit, daß $\|\nu\| = 1$ und daß für alle $f \in \mathcal{K}(E)$

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_1 \times E_2} f^* \, d\nu$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist aber äquivalent dazu, daß für $i=1,2$ und alle

$g_i \in \mathcal{K}(E_i)$ gilt

$$\int_{E_i} g_i \, d\mu_i = \int_{E_1 \times E_2} g_i(x_i) \, d\nu(x_1, x_2),$$

daß also $\mu_i = \pi_i(\nu)$.

Somit läßt sich (4.1.20) anwenden und es folgt:

P ist konvex und kompakt.

(3) Bemerkung: In (1) wurde das Projektionsproblem für das Produkt von zwei Räumen gestellt. Es läßt sich natürlich genauso für endlich viele lokal kompakte Räume $E_1, \dots, E_n$ und Maße $\mu_i \in \mathcal{M}_b^+(E_i)$ mit $\|\mu_i\| = 1$ ($i=1, \dots, n$) formulieren. Die Lösung läßt sich dann durch (2) und vollständige Induktion finden.

(4) Bemerkung: Mit ähnlichen Problemstellungen wie in (1) hat sich vor allem Kellner beschäftigt, wobei er allerdings nicht Radonmaße, sondern beschränkte allgemeine Maße betrachtet. In [11], Satz 2.2, kommt er dabei unter allgemeineren

Voraussetzungen zu dem Ergebnis, daß das Marginalproblem immer lösbar ist, falls eine Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, die im Fall von (1) mit " $\|\mu_1\| = \|\mu_2\|$ " äquivalent ist.

Weiterhin zeigt Kellerer in [10], Satz 6:

Sind $E_1, \dots, E_n$ polnisch und μ_i Wahrscheinlichkeitsmaße auf den E_i ($i=1, \dots, n$), dann ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\prod_{i=1}^n E_i$, für die die μ_i die i -ten Projektionen sind, kompakt.

4.2 Die Fortsetzungseigenschaft und der Hauptsatz

(4.2.1) Definition: Sei E ein lokal kompakter geordneter Raum und $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$. Man sagt, das Paar (E, μ) besitzt die Fortsetzungseigenschaft, wenn gilt:

Ist $K \subset E$ kompakt und $f_0 \in \mathcal{F}(K, [-1, +1])$, dann gibt es eine μ -integrierbare Funktion $f: E \rightarrow [-1, +1]$ mit $\int_E f \, d\mu \geq 0$ und $\text{Rest}_K f = f_0$.

(4.2.2) Bemerkung: Besitzt (E, μ) die Fortsetzungseigenschaft, dann gilt für alle isotonen beschränkten μ -integrierbaren Funktionen f : $\int_E f \, d\mu \geq 0$; insbesondere ist also μ isoton.

Beweis: Sei f isoton, beschränkt und μ -integrierbar, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Kompaktum $K \subset E$, so daß $f_0 = \text{Rest}_K f$ stetig ist und $|\mu|(K^c) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$. Es ist $f_0 \in \mathcal{F}_b(K)$, also gibt es wegen der Fortsetzungseigenschaft eine μ -integrierbare beschränkte Funktion g mit $\int_E g \, d\mu \geq 0$, $\|g\| \leq \|f\|$ und $\text{Rest}_K g = f_0$.

Dann ist $\int_E |f-g| \, d|\mu| = \int_{K^c} |f-g| \, d|\mu| \leq |\mu|(K^c) \cdot \sup_{K^c} |f-g| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|} \cdot 2\|f\| = \varepsilon$, und da $\int_E g \, d\mu \geq 0$, folgt auch $\int_E f \, d\mu \geq 0$.

(4.2.3) Fortsetzungslemma: Ist $K \subset E$ kompakt und $f_0 \in \mathcal{F}(K, [-1, +1])$, dann gibt es eine nach unten halbstetige isotone Funktion $f: E \rightarrow [-1, +1]$ mit $\text{Rest}_K f = f_0$.

Beweis: Man definiert

$$f: E \rightarrow [-1, +1]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \inf_{t \in K, x \leq t} f_0(t) & \text{für } x \in d(K) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $-1 \leq \alpha \leq +1$, dann bedeutet $f(x) \leq \alpha$: es gibt ein $t \in K$ mit $f_0(t) \leq \alpha$ und $x \leq t$, und das ist gleichbedeutend mit $x \in d(\{f_0 \leq \alpha\})$. Also folgt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{f \leq \alpha\} = \begin{cases} E & \text{für } \alpha \geq +1 \\ \emptyset & \text{für } \alpha < -1 \\ d(\{f_0 \leq \alpha\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\{f_0 \leq \alpha\}$ kompakt ist, ist also wegen (1.1.4.3) $\{f \leq \alpha\}$ stets abgeschlossen. Außerdem ist f isoton und $\|f\| = 1$; auf K ist $f = f_0$. *./.

(4.2.4) Satz: Es sei $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$. Dann sind äquivalent:

- (1) $\int_E f d\mu \geq 0$ für alle isotonen nach oben halbstetigen beschränkten Funktionen $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) $\mu(E) = 0$ und $\mu(F) \geq 0$ für alle isotonen abgeschlossenen Mengen $F \subseteq E$.
- (3) $\mu(E) = 0$ und $\mu(H) \geq 0$ für alle isotonen offenen Mengen $H \subseteq E$.
- (4) $\int_E f d\mu \geq 0$ für alle isotonen nach unten halbstetigen beschränkten Funktionen $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.
- (5) (E, μ) besitzt die Fortsetzungseigenschaft.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Die Funktionen 1 und -1 sind isoton und nach oben halbstetig, also ist $0 \leq \int_E 1 d\mu = \mu(E) = -(\int_E (-1) d\mu) \leq 0$, also $\mu(E) = 0$. Ist F abgeschlossen und isoton, dann ist 1_F isoton und nach oben halbstetig, also ist $\mu(F) = \int_E 1_F d\mu \geq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $H \subset E$ offen und isoton, $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es ein Kompaktum $K \subset H$ mit $|\mu|(H) < |\mu|(K) + \varepsilon$, also ist auch $|\mu|(H) < |\mu|(i(K)) + \varepsilon$. Da H isoton ist, gilt $i(K) \subset H$, und es folgt daraus $|\mu(H) - \mu(i(K))| < \varepsilon$. $i(K)$ ist isoton und wegen (1.1.4.3) abgeschlossen, also gilt nach Voraussetzung $\mu(H) > \mu(i(K)) - \varepsilon \geq -\varepsilon$, und somit ist $\mu(H) \geq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Es sei $f: E \rightarrow [-1, +1]$ nach unten halbstetig und isoton. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $V_\alpha := \{f > \alpha\}$, dann ist V_α offen und isoton, also $\mu(V_\alpha) \geq 0$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $u_n(x) := \left(\frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{n-1} 1_{V_{\frac{k}{n}}}(x)\right) - 1$, dann gilt

wegen $\mu(E) = 0$: $\int_E u_n d\mu = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{n-1} \mu(V_{\frac{k}{n}})\right) - \mu(1) \geq 0$.

Weiterhin ist $\|f - u_n\| \leq \frac{1}{n}$, also folgt $\int_E f d\mu \geq -\frac{1}{n} \|\mu\|$.

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\int_E f d\mu \geq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (5) folgt aus (4.2.3) und der Definition der Fortsetzungseigenschaft;

(5) $\Rightarrow$ (1) ergibt sich aus (4.2.2).

*/.

(4.2.5) Hauptsatz: Es sei E ein lokal kompakter geordneter Raum und $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$; (E, μ) besitze die Fortsetzungseigenschaft. Dann gibt es ein $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ mit $\|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, so daß für alle $f \in \mathcal{K}(E)$ gilt

$$\mu(f) = \int_{G \setminus \Delta} f^* d\nu.$$

(4.2.6) Bemerkung: Ist E kompakt und $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$, so ist wegen (1.3.4) und (1.3.6) oder auch wegen (1.2.2.3) und (3.2.1)

die Fortsetzungseigenschaft äquivalent mit: $\int_E f \, d\mu \geq 0$

für alle isotonen stetigen f . In dieser Formulierung (siehe Einleitung) wurde der Satz von Nachbin [14] bereits bewiesen. Im Beweis des Hauptsatzes wird die Richtigkeit der Aussage für kompaktes E benötigt werden.

(4.2.7) Bemerkungen:

(1) Der Hauptsatz besagt nichts anderes, als daß unter Voraussetzung der Fortsetzungseigenschaft für das wegen (4.2.2) isotone Maß μ stets $C_\mu \neq \emptyset$ gilt.

(2) Wegen (4.1.4.2) und (4.1.18) läßt sich die Aussage des Hauptsatzes noch erweitern. Es gilt nämlich sogar für alle μ -integrierbaren Funktionen $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : f^*$ ist ν -fast überall definiert, ν -integrierbar und es ist

$$\int_E f \, d\mu = \int_{G \setminus \Delta} f^* \, d\nu .$$

(3) Setzt man, ähnlich wie Nachbin im kompakten Fall, anstelle der Fortsetzungseigenschaft nur voraus: $\int_E f \, d\mu \geq 0$

für alle $f \in \mathcal{F}_b(E)$ (für alle $f \in \mathcal{F}(E)$ kann man es nicht fordern, da dann f nicht mehr μ -integrierbar zu sein braucht), dann ist die Aussage des Hauptsatzes im allgemeinen nicht mehr gültig:

Es sei $E = \Omega_0 \times \Omega'$ der in (2.2.3.1) beschriebene lokal kompakte geordnete Raum, A und B seien wie dort definiert.

Ist $f \in \mathcal{F}(E)$ und $t \in B$, also $t = (x, \Omega)$ mit $x \in \Omega_0$, dann ist wegen der Isotonie von f $\sup f(A) \leq f(t)$, wegen der Stetigkeit von

f kann jedoch nicht " $<$ " gelten, da sonst

$$f^{-1}(\cdot) - \infty, \frac{1}{2}(\sup f(A) + f(t))(\cdot) \text{ und } f^{-1}(\cdot) \frac{1}{2}(\sup f(A) + f(t)), +\infty(\cdot)$$

disjunkte offene Umgebungen von A und $\{(y, \Omega) : x \leq y\}$ wären,

was nicht möglich ist.

Also ist jede isotone stetige Funktion konstant auf B .

Für $i=1,2$ seien nun $t_i := (i, \Omega)$, es sei $\mu = \varepsilon_{t_1} - \varepsilon_{t_2}$. Dann ist $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ mit $\|\mu\| = 2$.

Angenommen, die Aussage des Hauptsatzes gilt, es gebe also

ein $\nu \in \mathcal{M}_0^+(G \setminus \Delta)$ mit $\|\nu\| = 1$, so daß für alle $\varphi \in \mathcal{K}(E)$

$$\mu(\varphi) = \int_{G \setminus \Delta} \varphi^* d\nu \text{ erfüllt ist.}$$

Es gibt ein $\varphi \in \mathcal{K}(E)$ mit $\varphi(t_1) = 1$, $\varphi(t_2) = -1$ und $\varphi = 0$ auf $(A \cup B) \setminus \{t_1, t_2\}$, da E lokal kompakt ist.

$$\begin{aligned} \text{Für dieses } \varphi \text{ gilt dann: } 2 = \mu(\varphi) &= \int_{G \setminus \Delta} \varphi^* d\nu = \\ &= \int_{G \setminus \Delta \setminus \{(t_1, t_2)\}} \varphi^* d\nu + \varphi^*(t_1, t_2) \cdot \nu(\{(t_1, t_2)\}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\nu|(G \setminus \Delta \setminus \{(t_1, t_2)\}) \cdot \sup |\varphi^*(G \setminus \Delta \setminus \{(t_1, t_2)\})| - 2 \nu(\{(t_1, t_2)\}) \leq \\ &\leq \|\nu\| \cdot 1 + 0 = 1, \text{ was einen Widerspruch ergibt.} \end{aligned}$$

(4) Das Maß ν , dessen Existenz im Hauptsatz gezeigt wird, ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt:

Es sei $E = [-1, +1]$ mit der üblichen Topologie und Ordnung,

$\mu = \text{id} \cdot \lambda_{[-1, +1]}$ wie in (4.1.17), dann stellt das in (4.1.17)

beschriebene Maß ν eine Lösung dar. Sind $h(x, y) := -2xy$

und $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq y-1 \leq 0\}$, dann sind aber auch

$\nu_1 = h \cdot \lambda_{[-1, 0] \times [0, 1]}$ und $\nu_2 = \lambda_B$ zwei weitere mögliche

Lösungen. (Siehe auch (4.3.4)).

(4.2.8) Beweis des Hauptsatzes (für lokal kompaktes E):

Man füge zu E zwei isolierte Punkte $+\infty, -\infty$ dazu, für

die gilt: $-\infty \leq x \leq +\infty$ für alle $x \in E$. Hiermit wird

$E_1 := E \cup \{+\infty, -\infty\}$ zu einem lokal kompakten geordneten Raum.

Weiterhin sei $\mathcal{K}_1 := \{K \subset E_1: K \text{ kompakt, } \pm\infty \in K\}$, dann ist

$(\mathcal{K}_1, \subset)$ eine gerichtete Menge.

Zu jedem $K \in \mathcal{K}_1$ bestimme man $\mu_K \in \mathcal{M}(K)$ (oder $\in \mathcal{M}(E_1)$) durch:

$\mu_K(\{+\infty\}) = \mu_+(K^c)$, $\mu_K(\{-\infty\}) = -\mu_-(K^c)$, für alle

Kompakta $L \subset E$ sei $\mu_K(L) = \mu(L \cap K)$. Auch hier werde μ je

nach Bedarf als Element von $\mathcal{M}^i(E)$ oder $\mathcal{M}^i(E_1)$ aufgefaßt.

Hiermit konvergiert das Netz $(\mu_K)_{K \in \mathcal{K}_1}$ in $\mathcal{M}(E_1)$ vag gegen

μ : Sei $f \in \mathcal{K}(E_1)$, $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $K \in \mathcal{K}_1$, so daß

$|\mu|(K^c) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$. Für alle kompakten $L \supset K$ gilt dann:

$$|\mu_K(f) - \mu(f)| = \left| \int_{L \setminus \{\pm\infty\}} f d\mu_K + f(\infty) \cdot \mu_+(L^c) - f(-\infty) \cdot \mu_-(L^c) - \int_{L \setminus \{\pm\infty\}} f d\mu \right| \leq \|f\| (\mu_+(L^c) + \mu_-(L^c) + |\mu|(L^c)) \leq \|f\| \cdot 2 |\mu|(K^c) < \varepsilon, \text{ also } \lim_{K \in \mathcal{K}_1} \mu_K = \mu.$$

Für alle $K \in \mathcal{K}_1$ gilt $\|\mu_K\| = \|\mu\|$, denn

$$\begin{aligned} \|\mu_K\| &= |\mu_K|(K \setminus \{\pm\infty\}) + |\mu_K|(\{+\infty\}) + |\mu_K|(\{-\infty\}) = \\ &= |\mu|(K \setminus \{\pm\infty\}) + \mu_+(K^c) + \mu_-(K^c) = \|\mu\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Außerdem ist } \mu_K(1) &= \mu_K(K \setminus \{\pm\infty\}) + \mu_+(K^c) - \mu_-(K^c) = \\ &= \mu(K \setminus \{\pm\infty\}) + \mu(K^c) = \mu(E) = 0. \end{aligned}$$

Hiermit ist für alle $K \in \mathcal{K}_1$ $\mu_K \in \mathcal{M}^i(K)$ bzw. $\in \mathcal{M}^i(E_1)$:

Sei $f \in \mathcal{F}(K)$; wegen $\mu_K(1) = 0$ sei o.B.d.A. $f(-\infty) = -1$,

$f(+\infty) = +1$. Wegen der Fortsetzungseigenschaft gibt es eine

μ -integrierbare beschränkte Funktion φ mit $\int_E \varphi d\mu \geq 0$,

$\|\varphi\| \leq 1$ und $\varphi = f$ auf $K \setminus \{\pm\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu_K(f) &= \int_{K \setminus \{\pm\infty\}} f \, d\mu_K + \mu_+(K^c) + \mu_-(K^c) \geq \\ &= \int_{K \setminus \{\pm\infty\}} \varphi \, d\mu + |\mu|(K^c) \cdot \|\varphi\| \geq \int_{K \setminus \{\pm\infty\}} \varphi \, d\mu + \int_{K^c} \varphi \, d\mu = \\ &= \int_E \varphi \, d\mu \geq 0, \text{ also ist } \mu_K \in \mathcal{M}^i(K) \text{ und damit } \in \mathcal{M}^i(E_1). \end{aligned}$$

Wegen (4.2.6) gibt es also zu jedem $K \in \mathcal{K}_1$ ein $\nu_K \in \mathcal{M}_0^+(G_K \setminus \Delta_K)$

mit $\|\nu_K\| = \frac{1}{2} \|\mu_K\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, so daß für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ gilt:

$$\mu(f) = \int_{G_K \setminus \Delta_K} f^* \, d\nu_K.$$

Seien nun $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_1$. Da $\nu_{K_2} \in \mathcal{C}\mu_{K_2}$, folgt aus (4.1.15):

$$\text{Für alle } K_1 \in \mathcal{K}_1 \text{ ist } \nu_{K_2}(K_1 \times K_1) \geq \frac{1}{2} \|\mu\| - |\mu_{K_2}|(K_1^c).$$

Außerdem gilt: $|\mu_{K_2}|(K_1^c) = |\mu_{K_2}|(K_2 \cap K_1^c) = |\mu|(K_2 \cap K_1^c)$

$\leq |\mu|(K_1^c)$, also folgt für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_1$:

$$\nu_{K_2}(K_1 \times K_1) \geq \frac{1}{2} \|\mu\| - |\mu|(K_1^c).$$

$\{\nu' \in \mathcal{M}^+(G_{E_1}) : \|\nu'\| \leq \frac{1}{2} \|\mu\|\}$ ist vag kompakt. Also hat das

Netz $(\nu_K)_{K \in \mathcal{K}_1}$ einen Häufungspunkt $\nu \in \mathcal{M}^+(G_{E_1})$, und es gibt

ein gegen ν konvergentes Teilnetz $(\nu_i)_{i \in S}$. Für jedes Kom-

paktum $K' \subset G_{E_1}$ gilt dann: $\nu(K') \geq \limsup_{i \in S} \nu_i(K')$, also folgt:

$$\|\nu\| = \sup_{K \in \mathcal{K}_1} \nu((K \times K) \cap G_{E_1}) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}_1} \limsup_{i \in S} \nu_i((K \times K) \cap G_{E_1}) \geq$$

$$\sup_{K \in \mathcal{K}_1} \limsup_{i \in S} \left(\frac{1}{2} \|\mu\| - |\mu|(K^c) \right) = \sup_{K \in \mathcal{K}_1} \left(\frac{1}{2} \|\mu\| - |\mu|(K^c) \right) = \frac{1}{2} \|\mu\|.$$

Außerdem ist $\|\nu\| \leq \frac{1}{2} \|\mu\|$, somit gilt $\|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$.

Ähnlich wie im Beweis von (4.1.20) folgt nun:

Für alle beschränkten $f \in \mathcal{C}(E_1)$ gilt

$$\int_{E_1} f \, d\mu = \lim_{i \in S} \int_{E_1} f \, d\mu_i = \lim_{i \in S} \int_{G_{E_1}} f^* \, d\mu_i = \int_{G_{E_1}} f^* \, d\nu .$$

Also ist bis jetzt gezeigt: Es gibt ein $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G_{E_1})$ mit den

geforderten Eigenschaften. Wegen (4.1.4.2) folgt sofort

$\nu(\Delta_{E_1}) = 0$. Mit $G = G_E$ ergibt sich außerdem:

$G_{E_1} \setminus G = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, wobei $A_1 = \{+\infty\}^c \times \{+\infty\}$,

$A_2 = \{-\infty\} \times \{-\infty\}^c$, $A_3 = \{+\infty\}^2 \cup \{-\infty\}^2$. Dann sind

$$\nu(A_1) = \int_{G_{E_1}} 1_{A_1} \, d\nu = \int_{G_{E_1}} 1_{\{\infty\}}^* \, d\nu = \mu(1_{\{\infty\}}) = 0 ,$$

$$\nu(A_2) = \int_{G_{E_1}} 1_{\{-\infty\}^c}^* \, d\nu = \int_E 1_{\{-\infty\}^c} \, d\mu = \mu(E) = 0 ,$$

und $\nu(A_3) \leq \nu(\Delta_{E_1}) = 0$. Daraus folgt $\nu(G_{E_1} \setminus G) = 0$;

insgesamt ist also $\nu(G_{E_1}) = \nu((G \setminus \Delta) \cup \Delta_{E_1} \cup (G_{E_1} \setminus G)) =$

$= \nu(G \setminus \Delta)$, und da $G \setminus \Delta$ lokal kompakt ist, kann ν als

Element von $\mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ aufgefaßt werden.

Hiermit ist der Hauptsatz bewiesen.

•/.

(4.2.9) Korollar: Es sei E ein lokal kompakter geordneter Raum und $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$. Weiterhin gelte eine der folgenden Bedingungen:

(1) E ist vollständig regulär geordnet.

(2) E ist normal geordnet.

Dann gibt es ein $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ mit $\|\nu\| = \frac{1}{2} \|\mu\|$, so daß für alle μ -integrierbaren Funktionen $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt: f^* ist

ν -fast überall definiert, f^* ist ν -integrierbar, und es ist

$$\int_E f \, d\mu = \int_{G \setminus \Delta} f^* \, d\nu .$$

Der Beweis folgt sofort aus (1.3.5) und (3.2.1).

(4.2.10) Bemerkung: Wegen (1.3.7) und (1.3.9) genügt es natürlich auch, wenn man in (4.2.9) anstelle von (1) und (2) voraussetzt:

Es gilt (3) E ist σ -kompakt, oder

(4) Die Ordnungsrelation von E ist total.

Dabei ist also (3) eine Bedingung, die nur mit der Topologie von E zusammenhängt, während (4) nur mit der Ordnung auf E etwas zu tun hat.

(4.2.11) Korollar: Sei E ein lokal kompakter geordneter Raum und $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$. Zu den fünf Bedingungen des Satzes (4.2.4) sind zusätzlich äquivalent:

(6) $C_\mu \neq \emptyset$.

(7) $C'_\mu \neq \emptyset$.

Beweis: (5) $\implies$ (6) folgt aus (4.2.2) und dem Hauptsatz.

(6) $\implies$ (7) ist trivial.

(7) $\implies$ (1): Sei $\nu \in C'_\mu$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ sei isoton, nach oben halbstetig und beschränkt. Dann gilt wegen (4.1.10)

$$\int_E f \, d\mu = \int_G f^* \, d\nu \geq 0, \text{ da } f^* \geq 0. \quad ./.$$

Zum Schluß sollen nun noch einige Aussagen angegeben werden, die unmittelbar aus (4.2.11) folgen, die es aber verdienen, noch besonders hervorgehoben zu werden.

(4.2.12) Korollar: Gilt eine der vier Voraussetzungen von (4.2.9) bzw. (4.2.10), so ist zu den sieben Bedingungen von (4.2.11) außerdem äquivalent:

(8) μ ist isoton.

(4.2.13) Korollar: (Erweiterung des Hauptsatzes)

Sei E ein lokal kompakter geordneter Raum und $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$.

Dann sind äquivalent:

(1) (E, μ) besitzt die Fortsetzungseigenschaft.

(2) Es gibt ein $\nu \in \mathcal{M}_b^+(G \setminus \Delta)$ mit $\|\nu\| = \frac{1}{2}\|\mu\|$, so daß für alle $f \in \mathcal{K}(E)$ gilt

$$\mu(f) = \int_{G \setminus \Delta} f^* d\nu.$$

(4.2.14) Korollar: Sei $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$, dann gilt:

$$C_\mu \neq \emptyset \iff C_\mu^i \neq \emptyset.$$

4.3 Eine Aussage über die Extrempunkte von C_μ

In (4.1.20) wurde gezeigt, daß für alle $\mu \in \mathcal{M}^i(E)$ C_μ konvex und kompakt ist. Es liegt also nahe, nach den Extrempunkten von C_μ zu suchen.

(4.3.1) Definition: Sei E ein lokal kompakter Raum. Ist auf E eine Ordnungsrelation gegeben, deren Graph G abgeschlossen ist, so sei $\mathcal{M}^G(E)$ die Menge aller bezüglich dieser Ordnungsrelation isotonen Maße (diese Menge wurde in (4.1.1) mit $\mathcal{M}^i(E)$ bezeichnet). Weiterhin sei $C_\mu^G = C_\mu$ (wie in (4.1.3) definiert).

Ist $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$, dann heiße eine abgeschlossene Ordnungsrelation $G \subset \text{Ex} E$ μ -minimal, wenn gilt:

(1) $\mu \in \mathcal{M}^G(E)$,

(2) Ist G' eine abgeschlossene Ordnungsrelation auf E mit

$G' \subset G$, so daß $\mu \in \mathcal{M}^{G'}(E)$ gilt, dann ist $G = G'$.

(4.3.2) Satz: Es sei E ein σ -kompakter lokal kompakter Raum und $\mu \in \mathcal{M}_b(E)$. Es gebe eine abgeschlossene Ordnungsrelation $H \subset E \times E$ mit $\mu \in \mathcal{M}^H(E)$. Dann gibt es eine μ -minimale abgeschlossene Ordnungsrelation auf E , die in H enthalten ist.

Beweis: Sei $(\mathcal{G}, \subset)$ die geordnete Menge aller abgeschlossenen Ordnungsrelationen G' auf E mit $G' \subset H$ und $\mu \in \mathcal{M}^{G'}(E)$.

Es sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Kette in $\mathcal{G}$, dann setze man $G := \bigcap_{i \in I} G_i$.

G definiert dann wieder eine abgeschlossene Ordnungsrelation.

Wegen (4.2.10) gibt es für alle $i \in I$ ein $\nu_i \in C_\mu^H$ (sogar $\nu_i \in C_\mu^{G_i}$), so daß $T\nu_i \subset G_i$. Wegen (4.1.20) ist C_μ^H kompakt,

also besitzt das Netz $(\nu_i)_{i \in I}$ ein konvergentes Teilnetz

$(\nu_j)_{j \in J}$ mit $\nu := \lim_{j \in J} \nu_j \in C_\mu^H$.

Ist $(x, y) \notin G$ und sind K_1, K_2 kompakte Umgebungen von x bzw. y mit $(K_1 \times K_2) \cap G = \emptyset$, dann gibt es wegen $\bigcap_{j \in J} G_j = G$ ein $j_0 \in J$,

so daß $(K_1 \times K_2) \cap G_{j_0} = \emptyset$. Also ist für alle $j \geq j_0$ $(x, y) \notin T\nu_j$,

somit ist $(x, y) \notin T\nu$, und daraus folgt $T\nu \subset G$. Demnach kann ν als Element von C_μ^G aufgefaßt werden, und wegen (4.1.9.1)

ist $\mu \in \mathcal{M}^G(E)$.

Also ist G untere Schranke der $(G_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{G}$, und wegen des Zornschen Lemmas besitzt $\mathcal{G}$ ein minimales Element. $\cdot/\cdot$.

Im folgenden Satz sei nun die Ordnungsrelation wieder fest gewählt.

(4.3.3) Satz: Es sei E ein lokal kompakter geordneter Raum mit Ordnungsrelation G , $\mu \in \mathcal{M}^1(E) = \mathcal{M}^G(E)$. Weiterhin sei $G' \subset G$ eine μ -minimale abgeschlossene Ordnungsrelation mit $C_\mu^{G'} \neq \emptyset$. Ist dann $G \setminus \Delta$ metrisierbar, dann gibt es ein $\nu \in \text{ex } C_\mu$ mit $T\nu \subset G'$.

Beweis: Sei $G \setminus \Delta$ metrisierbar mit Metrik $d \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} L: C_\mu &\rightarrow \mathbb{R} \\ \nu &\rightarrow \int_{G \setminus \Delta} d(G' \setminus \Delta, (x, y)) \, d\nu(x, y) \end{aligned}$$

eine stetige affine Funktion auf C_μ . Die Minimalstellen von L sind alle $\nu \in C_\mu$ mit $L(\nu) = 0$. Für alle solchen ν gilt also $\nu(G' \setminus \Delta) = \frac{1}{2} \|\mu\|$, d.h. $T\nu \subset G'$ (es ist ja $G' \setminus \Delta$ abgeschlossen in $G \setminus \Delta$). Wegen Bauer [1], Satz (2.2.1) befindet sich unter diesen ν ein Extrempunkt von C_μ .
·/.

(4.3.4) Beispiel: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $E = \{1, \dots, 2n\}$ versehen mit der diskreten Topologie und der Ordnungsrelation $G = \Delta \cup \{1, \dots, n\} \times \{n+1, \dots, 2n\}$.

Es sei $\mu = \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon_j - \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$, dann ist $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$.

Ist $\nu \in C_\mu$, dann gilt wegen (4.1.11) für $k=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{2n} \nu(\{(k, j)\}) &= \nu(d(k) \times d(k)^c) = \mu(d(k)^c) = 1, \text{ und} \\ \sum_{j=1}^n \nu(\{(j, k+n)\}) &= \nu(i(k+n)^c \times i(k+n)) = \mu(i(k+n)) = 1. \end{aligned}$$

Also ist die Matrix $(\nu(\{(i, j)\}))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=n+1, \dots, 2n}}$ doppelt-stochastisch.

Ist umgekehrt eine doppelt-stochastische Matrix

$(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=n+1, \dots, 2n}}$ gegeben und setzt man $\nu(\{(i, j)\}) = a_{ij}$

für alle i, j , dann folgt für jede reelle Funktion f auf E :

$$\begin{aligned} \nu(f^*) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} (f(j) - f(i)) \cdot a_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=n+1}^{2n} f(j) \cdot a_{ij} - \sum_{j=n+1}^{2n} f(i) \cdot a_{ij} \right) = \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=1}^n f(j) \cdot a_{ij} - \\ &- \sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{j=n+1}^{2n} f(j) - \sum_{i=1}^n f(i) = \mu(f), \end{aligned}$$

d.h. $\nu \in C'_\mu$ und wegen $\|\nu\| = n$ sogar $\nu \in C_\mu$.

Also ist C_μ homöomorph zur Menge aller doppelt-stochastischen $(n \times n)$ -Matrizen (die vage Topologie ist ja hier die gewöhnliche Topologie des $\mathbb{R}^{n^2}$). Die μ -minimalen Ordnungsrelationen G' auf E sind genau die $n!$ Ordnungsrelationen, für die gilt: Zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es genau ein $j \in \{n+1, \dots, 2n\}$ mit $i \leq j$. Aus (4.3.3) folgt, daß es zu jedem solchen G' ein $\nu \in \text{ex } C_\mu$ gibt mit $T\nu \subset G'$. Daraus folgt aber für alle $(i, j) \in G' \setminus \Delta$ $\nu(\{(i, j)\}) = 1$, d.h. ν ist eindeutig bestimmt und entspricht einer Permutationsmatrix.

Somit sind die Permutationsmatrizen extremal in der Menge der doppelt-stochastischen Matrizen, und wie leicht einzusehen ist, sind dies alle Extrempunkte.

Einen anderen Beweis dieser Aussage findet man z.B. bei Jacobs [9], Satz 2.3.

4.4 Schlußbemerkung

(4.4.1):

Abschließend bleibt noch zu bemerken, daß sich die meisten Ergebnisse des Abschnittes (4.1) weitaus allgemeiner fassen lassen. Es genügt hier nämlich bei den meisten Aussagen, G lediglich als Borelmenge $C \subseteq ExE$ vorauszusetzen, ausgenommen die Sätze (4.1.12) und (4.1.13), wo man noch Zusatzvoraussetzungen braucht wie: " G abgeschlossen" oder " $G \cap G^{-1} \subseteq \Delta$ ". Dabei werde natürlich für beliebiges $G \subseteq ExE$ definiert: f heißt isoton (bezüglich G), wenn $f^* \supseteq 0$ auf G erfüllt ist. Hiermit lassen sich alle weiteren Begriffe in der gewohnten Weise herleiten.

Anders sieht es im zweiten Abschnitt von §4 aus. Speziell die Transitivität von G ist unbedingt notwendig, um die Gültigkeit des Hauptsatzes und der anschließenden Korollare zu gewährleisten.

Schließlich bleiben in (4.3) noch zwei Vermutungen offen, die vor allem durch das Beispiel (4.3.4) induziert werden, und zwar fragt man:

- (1) Ist G' μ -minimal, gibt es dann höchstens ein $\nu \in ex C_\mu$ mit $T_\nu \subseteq G'$? , und
- (2) Ist $\nu \in ex C_\mu$, gibt es dann eine μ -minimale abgeschlossene Ordnungsrelation G' mit $T_\nu \subseteq G'$?

In allen nachprüfbaren Beispielen (deren es allerdings nicht viele gibt) haben sich diese Vermutungen tatsächlich bestätigt; trotzdem bestehen Zweifel, ob sie allgemein richtig sind: es ist nämlich nicht gesagt, daß die Definition der

μ -Minimalität, für die lediglich abgeschlossene Ordnungsrelationen zugelassen werden, für diese Zwecke geeignet ist. Andererseits ist es jedoch auch nicht sinnvoll, den Begriff " μ -minimal" so zu definieren, daß man beliebige (vielleicht noch abgeschlossene) Teilmengen von $E \times E$ zuläßt, da dann wiederum die Gültigkeit des Hauptsatzes, also $C_\mu \neq \emptyset$, nicht gesichert wäre.

(4.4.2) Verallgemeinerung der Problemstellung: Es sei E ein lokal kompakter Hausdorffraum, n eine natürliche Zahl, G eine abgeschlossene Teilmenge von E^n und F eine reellwertige Funktion auf $\mathcal{C}(E) \times G$. Für alle $a \in G$ sei $f^*(a) = F(f, a)$; die Abbildung $f \rightarrow f^*$ sei linear (d.h. F ist linear in der ersten Komponente). Eine Funktion f auf E heiße isoton (bezüglich G, F), wenn $f^*(a) \geq 0$ für alle $a \in G$. Ein beschränktes Radonmaß μ auf E soll wiederum isoton heißen, wenn $\int_E f d\mu \geq 0$ richtig ist für alle $f \in \mathcal{M}^i(E)$ = Menge aller stetigen isotonen beschränkten Funktionen.

Beispiele:

- (1) $n=1$, $G = E$, und $F(f, x) := f(x)$.

Dann sind die Begriffe "positiv" und "isoton" sowohl für Funktionen als auch für Maße identisch.

- (2) $n=2$, G sei abgeschlossener Graph einer Ordnungsrelation, $F(f, x, y) := f(y) - f(x)$.

Dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit behandelt.

- (3) Es sei E eine konvexe kompakte Teilmenge eines lokal konvexen Hausdorffraums, $n=3$,

$G = \{(x, y, tx + (1-t)y) : x, y \in E, 0 \leq t \leq 1\}$ und
 $F(f, x, y, tx + (1-t)y) := tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)$.

Dann sind die isotonen Funktionen genau die konvexen Funktionen auf E . Ein Maß μ auf E ist genau dann isoton, wenn μ_+ größer als μ_- in der Bishop-de Leeuwschen Ordnungsrelation ist.

(4) Sei E ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$,

$G = \{(x, x+h, \dots, x+(n-1)h) : x \in E, h \geq 0\} \cap E^n$, und
 $F(f, x, x+h, \dots, x+(n-1)h) := (-1)^{n-1} \Delta_h^{n-1} f(x) =$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} f(x+kh)$.

Dann sind die isotonen $(n-1)$ -fach differenzierbaren Funktionen auf E genau diejenigen, für die $(-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x) \geq 0$ auf E gilt; dementsprechend ist eine Funktion auf E genau dann vollständig monoton, wenn sie für alle $n \in \mathbb{N}$ isoton ist. (Siehe etwa Choquet [6], §32).

Es stellt sich nun die Frage, ob man analoge Aussagen wie in der vorliegenden Arbeit auch bei der verallgemeinerten Problemstellung erhalten kann. Für die Aussagen des Abschnitts (4.1) dürfte dies wiederum weitgehend zutreffen. Wie allerdings schon in (4.4.1) erwähnt wurde, ist im allgemeinen Fall eine analoge Aussage zum Hauptsatz (daß also der Operator $T^\# : \mathcal{M}_b^+(G) \rightarrow \mathcal{M}^i(E)$ von (4.1.6) surjektiv ist) nicht richtig. In den gewählten Beispielen sind jedoch G und F so "passend" gewählt, daß hier durchaus auch in (3) und (4) T^* surjektiv sein könnte. Es bleibt zu untersuchen, ob eine Verallgemeinerung dieser Art tatsächlich möglich ist.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bauer, H., Konvexität in topologischen Vektorräumen,
Vorlesungsausarbeitung, Hamburg 1964
- [2] - , Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge
der Maßtheorie, de Gruyter, Berlin 1968
- [3] Bourbaki, N., Espaces vectoriels topologiques, chap.
I-II, Act.Sci.et Ind.1189, Paris 1953
- [4] - , Topologie générale, chap.I-II (2^e édition),
Act.Sci.et Ind.858=1142, Paris 1951
- [5] - , Intégration, chap.I-IV (2^e édition), Act.
Sci.et Ind.1175, Paris 1965
- [6] Choquet, G., Lectures on Analysis, vol.I-II, Benjamin,
New York 1969
- [7] Constantinescu, C./Cornea, A., Ideale Ränder Riemannscher
Flächen, Springer, Berlin 1963
- [8] Halmos, P.R., Measure Theory, van Nostrand, New York 1950
- [9] Jacobs, K., Extrempunkte konvexer Mengen in:
Selecta Mathematica III, S.90-118, Springer,
Berlin 1971
- [10] Kellerer, H.G., Markov-Komposition und eine Anwendung
auf Martingale, Math.Annalen 198, S.99-122(1972)
- [11] - , Maßtheoretische Marginalprobleme, Math.
Annalen 153, S.168-198 (1964)
- [12] Kelley, J.L., General Topology, van Nostrand, New York
1955

- [13] Meghea, C., Compactification des Espaces Harmoniques,
Springer, Berlin 1971
- [14] Nachbin, L., Linear continuous functionals positive on
the increasing continuous functions, Sum. Bras.
Math. II, Fasc. 10, p. 135-150 (1951) (Nachdruck
in [16], S. 108 ff.)
- [15] - , Sur les espaces uniformisables ordonnés,
Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol. 226, p. 547
(1948) (Nachdruck in englischer Sprache siehe
[16], S. 103 f.)
- [16] - , Topology and Order, van Nostrand, New York
1965
- [17] Simmons, G. F., Introduction to topology and modern ana-
lysis, McGraw-Hill, New York 1963

Verzeichnis der verwendeten Symbole und Begriffe

$\prec$	16	isotone Abbildung . . .	4
antitone Abbildung . . .	4	isotone Hülle	4
antitone Hülle	4	isotone Menge	4
antitone Menge	4	isotones Maß	25
C_μ , C_μ^*	25	$i(X)$, $i(x)$	4
C_μ^G	45	kanonische Einbettung	16
$\mathcal{C}(X)$	24	"Kompaktifizierung" .	20
Δ , Δ_E	4	$\mathcal{K}(X)$	24
$\mathcal{D}_1(E)$	16	$\mathcal{M}^G(E)$	45
Diagonale	4	$\mathcal{M}^i(E)$	25
$d(X)$, $d(x)$	4	μ -minimal	45
e	16	$\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}^+(X)$, $\mathcal{M}_b(X)$,	
Einbettungslemma . . .	17	$\mathcal{M}_b^+(X)$	24
f^*	24	N_f	24
Fortsetzungseigenschaft		normal geordneter Raum	7
.	36	Ordnungskompaktifizie-	
Fortsetzungslemma . . .	36	rung	18
G , G_E	4	Ordnungsrelation . . .	4
geordneter (top.) Raum	5	$\overline{\pi}_1$, $\overline{\pi}_2$	27
Graph	4	Q-Kompaktifizierung .	21
Hauptsatz	38	T_I , T_{II} , T_{III} , T_{IV} . .	11
$\mathcal{F}(E_1, E_2)$, $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{F}_b(E)$	5	vollständig regulär ge-	
$\mathcal{F}_1(E)$	16	ordneter Raum,	
Isomorphismus	16	VRG-Raum	6

LEBENS LAUF

Am 1. September 1943 wurde ich als der einzige Sohn des Lackierers Hermann Hommel und seiner Ehefrau Gunda, geb. Süß, in Erlangen geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Erlangen-Bruck war ich Schüler des Gymnasiums Fridericianum in Erlangen, wo ich im Juli 1963 das Abitur ablegte.

Im Wintersemester 1963/64 begann ich das Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Ich hörte Vorlesungen bei den Professoren Bauer, Finkelnburg, Fleischmann, Jacobs, Nöbeling, Rieger, Specht und Volz. Im Mai 1966 bestand ich die Diplom-Vorprüfung für Mathematik.

Im Wintersemester 1966/67 studierte ich an der Ruhruniversität Bochum, wo ich an Vorlesungen der Professoren Benz, Ehlich, Kellerer und Reiffen teilnahm; hierauf kehrte ich wieder nach Erlangen zurück und erhielt von Herrn Prof. Specht eine Diplomarbeit. Seit Mai 1969 bin ich als Tutor bzw. wissenschaftliche Hilfskraft am mathematischen Institut in Erlangen beschäftigt. Im Oktober 1969 legte ich die Diplom-Prüfung für Mathematik ab. Seitdem bin ich Doktorand bei Herrn Prof. Bauer in Erlangen.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990